mecanismos

Escultura andarilha de Theo Jansen

Prof. Dr. Newton Landi Grillo

SUMÁRIO

1. Vetores e Escalares

1.1 Vetores 4
1.2 Adição de Vetores 4
1.3 Subtração de Vetores 5
1.4 Decomposição de Vetores 6
1.5 Escalar 7
1.6 Multiplicação de um Escalar por um Vetor 7
1.7 Sistemas de Coordenadas 8
1.8 Algumas Relações Trigonométricas 9
1.9 Notação de Vetor Expresso no Plano 11
1.10 Produto Vetorial 11
1.11 Produto Escalar 12
1.12 Vetor no Plano: Notação Complexa 13

2. Mecanismos

2.0 Definições 14
2.1 Noções Básicas Sobre Mecanismos 15
2.2 Tipos de Movimentos no Plano 16
2.3 Juntas Cinemáticas 17
2.4 Graus de Liberdade 18
2.5 Inversão Cinemática 21

3. Mecanismos Elementares

3.1 Definições 23
3.2 Mecanismo de Quatro Barras 24
3.3 Regra de Grashof 25
3.4 Fase de Ponto Morto 27
3.5 Índices de Mérito 27
3.6 Aplicações e Configurações de Mecanismos Articulados 30
3.7 Noções Sobre Metodologia de Projeto 33

4. Posição e Deslocamento

4.1 Deslocamento Absoluto 38
4.2 Deslocamento Relativo 38
4.3 Métodos Analíticos para a Determinação de Posições 41
4.3.1 Análise de Posição de um Mecanismo Biela-Manivela 41
4.3.1.1 Método Algébrico 41
4.3.1.2 Método da Notação Complexa 42
4.3.2 Análise de Posição de um Mecanismos de Quatro Barras 45
4.3.2.1 Método da Notação Complexa 45

5. Velocidades em Mecanismos Articulados

5.1 Regra da Cadeia para Derivadas 48
5.2 Velocidade Angular 50
5.3 Equação de Velocidade Relativa 51
5.4 Métodos para a Determinação de Velocidades em Mecanismos 52
5.4.1 Método da Notação Complexa – *Mecanismo Biela Manivela* 52
5.4.2 Método do Polígono de Velocidades 54
5.4.3 Método dos Centros Instantâneos de Rotação 57
5.4.4 Método da Notação Complexa – *Mecanismo Quatro Barras* 58
5.4.5 Método do Polígono de Velocidades 61
5.4.6 Método dos Centros Instantâneos de Rotação 63

6. Acelerações em Mecanismos Articulados

6.1 Equação de Aceleração Relativa 68
6.2 Métodos para a Determinação de Acelerações em Mecanismos 69
6.2.1 Método da Notação Complexa – *Mecanismo Biela Manivela* 69
6.2.2 Método do Polígono de Acelerações 71
6.2.3 Método da Notação Complexa – *Mecanismo de Quatro Barras* 75
6.2.4 Método do Polígono de Acelerações 78
6.3 Aceleração em um Ponto no Sistema Móvel – Aceleração de Coriolis 82

7. Análise Estática em Mecanismos Articulados

7.1 Análise Estática 87

7.1.1 Momento do Binário 88

7.1.2 Forças e Torques Estáticos em Mecanismos Articulados 90

7.2 Análise Dinâmica 93

7.2.1 Princípio d'Alembert 93

7.2.2 Forças e Torques Dinâmicos em Mecanismo Articulado – Método do Trabalho Virtual 95

7.2.3 Determinação do Momento de Inércia – Centro de Percussão 97

7.2.3.1 Determinação do Período de Oscilação do Pêndulo Físico 98

7.3 Exemplo de Aplicação 102

8. Bibliografia 104

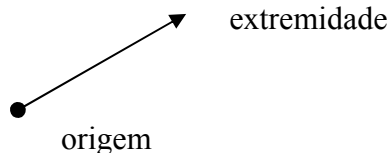
1. VETORES E ESCALARES

1.1 Vetores

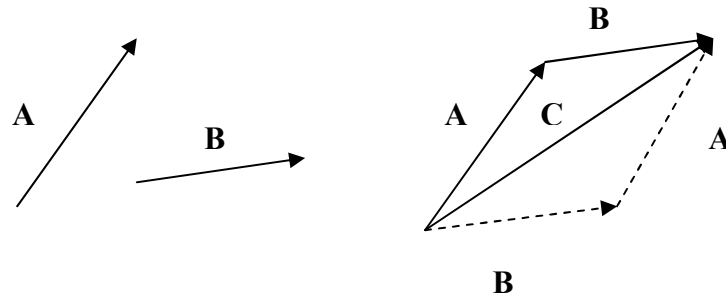
Vetores são entes matemáticos que possuem magnitude, direção e sentido, e que se somam de acordo com a regra do paralelogramo.

Intensidade de um vetor: caracterizada por um certo número de unidades,
Direção de um vetor: definida por sua linha de ação – horizontal, vertical, inclinada,
Sentido de um vetor: identificado por uma seta – direita-esquerda, cima-baixo, vice-versa. Exemplo:

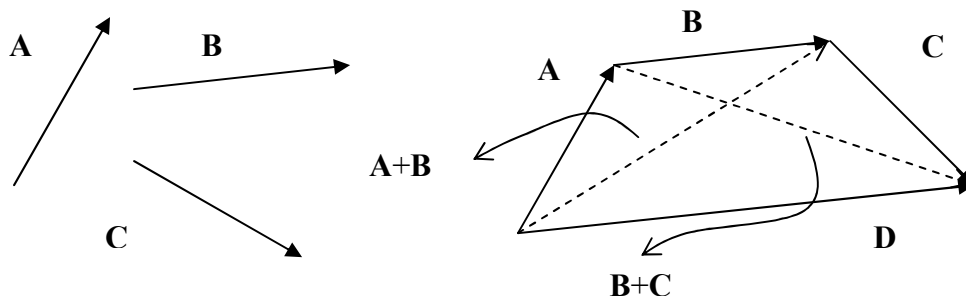
Uma força de 15 Newtons aplicada na horizontal, da esquerda para a direita. A intensidade, o módulo ou magnitude do vetor será 15 N, sua direção horizontal, e seu sentido da esquerda para a direita.

Um vetor é representado graficamente por uma seta possuindo uma origem e uma extremidade, ex:

Analiticamente um vetor é representado por uma letra em negrito ou com uma flexa sobre a letra, ex:
V ou $\vec{V}$. Em nosso texto usaremos a representação em negrito.

1.2 Adição de Vetores

Sendo dados dois vetores **A** e **B**, a notação **A** + **B** expressa a adição do vetor **B** ao vetor **A**, resultando em um terceiro vetor **C** denominado vetor resultante. Para realizarmos a operação utilizamos a regra do paralelogramo:

A soma de dois vetores **A** e **B** pode ser realizada tanto adicionando o vetor **A** ao vetor **B** quanto o vetor **B** ao vetor **A** resultando no vetor **C**. Esta propriedade é chamada *comutativa*.

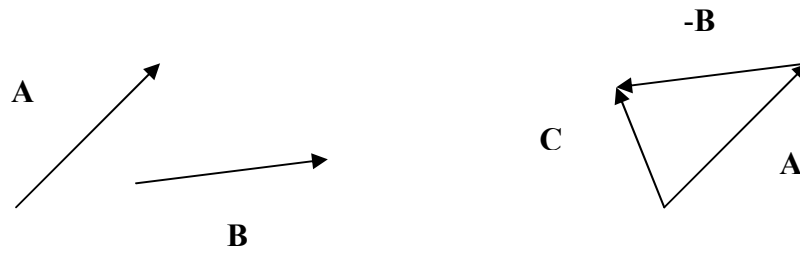
A + **B** = **B** + **A** = **C**

Sendo dados três vetores **A, B** e **C**. Para realizarmos a adição entre eles fazemos:
(**A**+**B**) + **C** ou **A** + (**B** + **C**) = **D**. Esta propriedade é chamada *associativa*.

As propriedades comutativa e associativa significam que quando se realiza a adição de vários vetores, o resultado independe da ordem em que os vetores são somados. A adição de uma série de vetores para se obter um único vetor é denominado *composição de vetores*, e o resultado da operação é chamado *vetor resultante.*

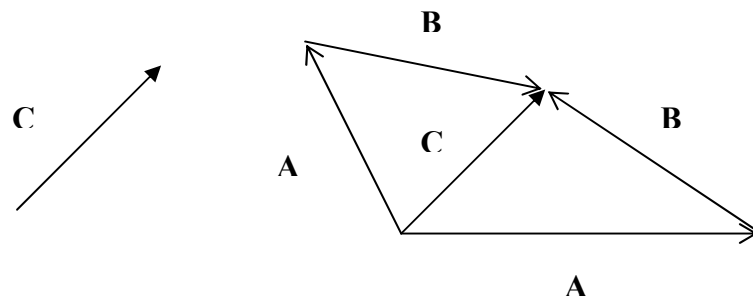
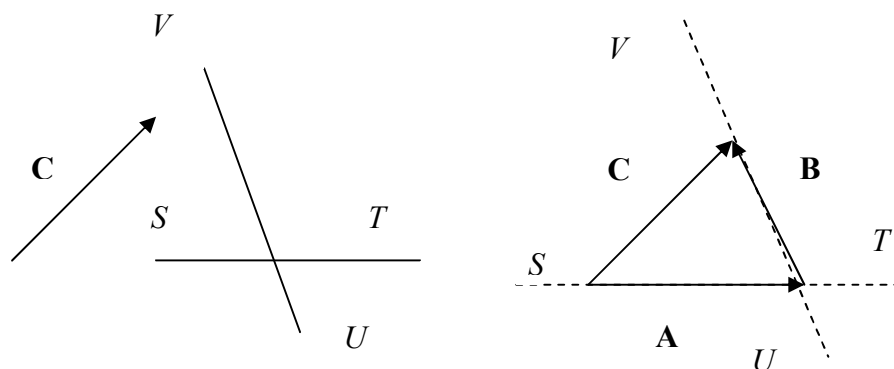
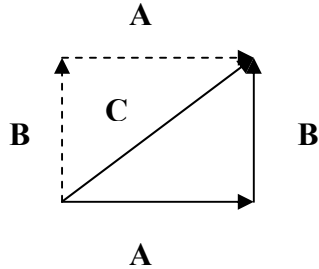
1.3 Subtração de Vetores

A operação de subtração de vetores é definida pela expressão

A - **B** = **A** + (-**B**), onde o sinal (-) significa sentido inverso de **B**.

Considere dois vetores **A** e **B.** Queremos realizar a operação **A** – **B** = **C**

Quando se realiza a soma ou subtração de vetores, acopla-se a origem de um vetor na extremidade de outro.

1.4 Decomposição de Vetores

Sendo dado um vetor **C**, determinar dois vetores **A** e **B**, tal que **A** + **B** = **C**

Obtermos infinitas soluções. Para obtermos uma única solução, é necessário fornecer as direções dos vetores **A** e **B**, exemplo, o vetor **A** na direção *ST* e o vetor **B** na direção *UV*.

Em um caso particular quando as componentes **A** e **B** do vetor **C** são perpendiculares entre si, são denominados componentes retangulares de **C**.

1.5 Escalar

Um escalar é qualquer grandeza que pode ser especificada por um número real. São simplesmente números positivos, negativos ou nulos utilizados na especificação de grandezas como tempo, temperatura, energia, volume, comprimento, etc.

1.6 Multiplicação de um Escalar por um Vetor

Considerando a soma de três vetores: **A**+**A**+**A**. Esta soma pode ser simplificada escrevendo-se 3**A,** que é a multiplicação de um escalar por um vetor. Chamando de r um escalar, o produto r**A** define outro vetor que será nulo se r for zero, e terá sentido contrário de **A** se o escalar r for negativo.

A divisão de um vetor por um escalar equivale à multiplicação do vetor pelo inverso do escalar ($1/r$). Se o escalar for igual ao módulo do vetor, o resultado da operação denomina-se *vetor unitário*, cuja grandeza é igual a 1, podendo ser positivo ou negativo, indicando somente direção e sentido.

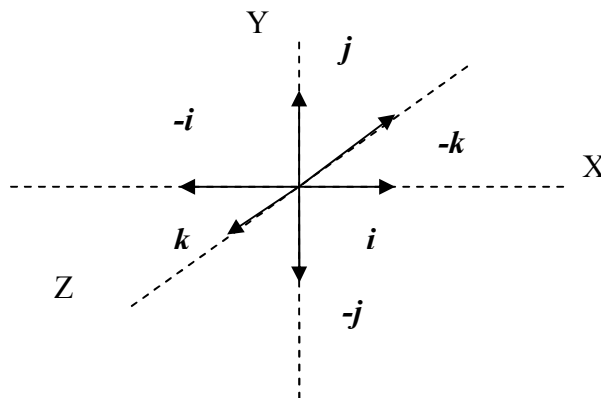
$\vec{r} = \frac{R}{r}$ onde

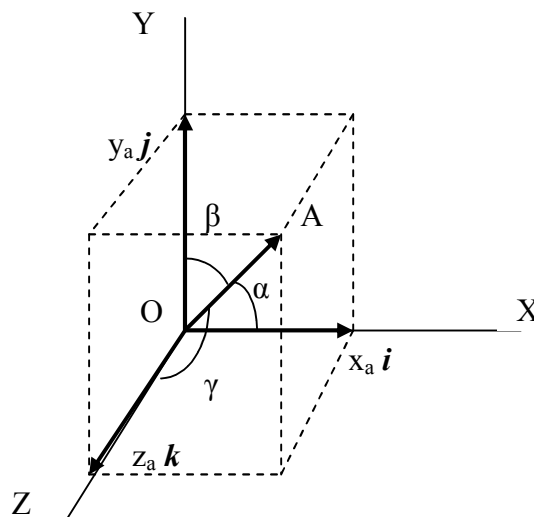
$\vec{r}$ = vetor unitário

R = vetor

r = escalar, o qual possui a mesma direção e sentido de **R**

1.7 Sistemas de Coordenadas

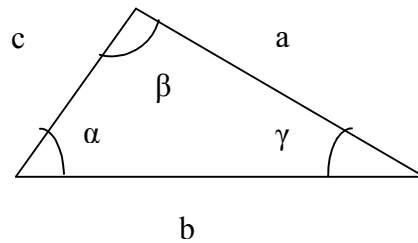
Em alguns sistemas de referência, são normalmente utilizados certos símbolos para designar vetores unitários associados aos eixos de referência. No sistema de coordenadas cartesianos retangulares, o terno de vetores $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ ou na notação ***i, j, k*** define as direções X, Y, Z respectivamente.

Considere um ponto A no espaço com coordenadas x_a, y_a, z_a definindo sua posição em relação à origem do sistema de coordenadas O. A posição de A é expressa por:

$\mathbf{A} = x_a\,\boldsymbol{i} + y_a\boldsymbol{j} + z_a\,\boldsymbol{k}$

O módulo do vetor **A** é dado por $A = \sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2}$

Os cossenos diretores de **A** são

$\cos\alpha = \frac{x_a}{A}$ $\cos\beta = \frac{y_a}{A}$ $\cos\gamma = \frac{z_a}{A}$

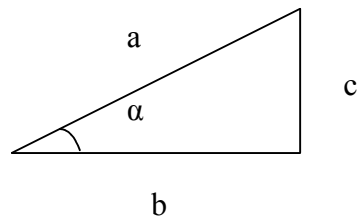
1.8 Algumas Relações Trigonométricas

Considere o triângulo escaleno; suas grandezas podem ser encontradas pelas leis dos senos e dos cossenos

Lei dos cossenos: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$

Lei dos senos: $\frac{sen\alpha}{a} = \frac{sen\beta}{b} = \frac{sen\gamma}{c}$

Considere o triângulo retângulo

a = hipotenusa

$a^2 = b^2 + c^2$, portanto, $a = \sqrt{b^2 + c^2}$

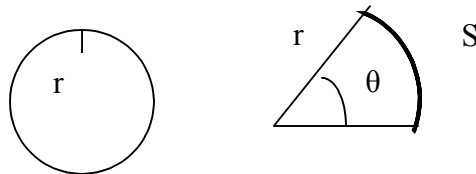
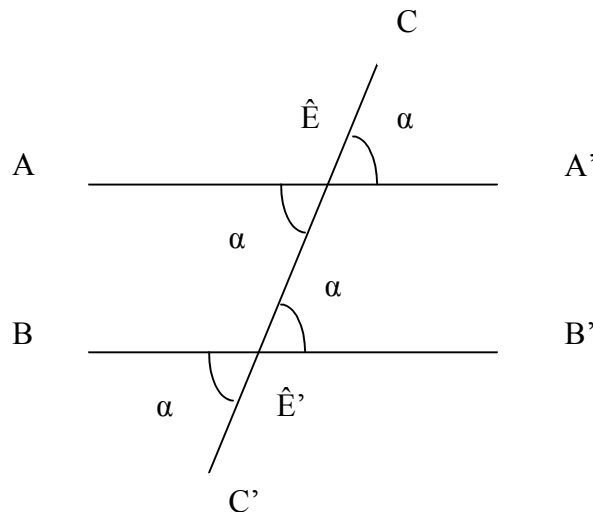
b = cateto adjacente, $b = a\cos\alpha$

c = cateto oposto, $c = a\,sen\alpha$

O ângulo α é encontrado através da relação entre seno e cosseno:

$$tg\alpha = \frac{c}{b}$$

A medida de uma circunferência é dada por 2π.r,

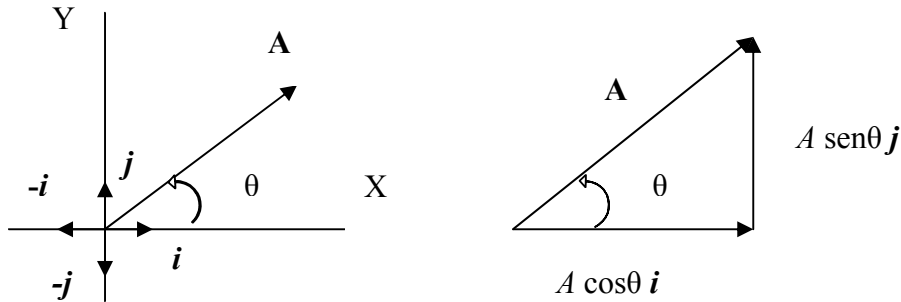
A medida de um arco (S) de um circulo é dado por S=θ.r, onde θ (rad)

Considere duas retas paralelas e não coincidentes AA’ e BB’ e a reta inclinada CC’, sendo Ê e Ê’ vértices. Tomando as análises em função dos ângulos α, teremos

CÊA’ = AÊC’ : ângulos opostos pelo vértice,

CÊA’ = CÊ’B’: ângulos correspondentes,

AÊC’ = CÊ’B’: ângulos alternos internos,

CÊA’ = BÊ’C’: ângulos alternos externos

1.9 Notação de Vetor Expresso no Plano

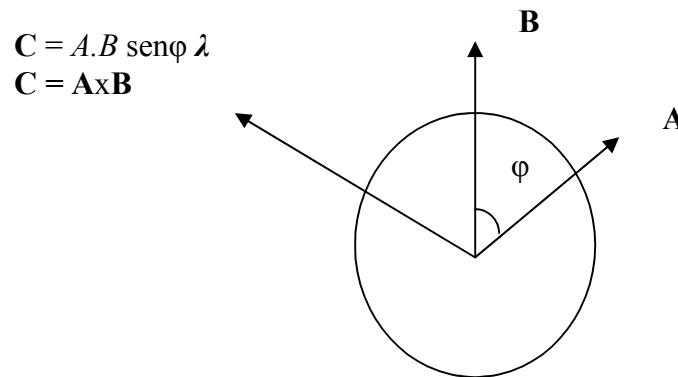
Considere um vetor **A** expresso no plano cartesiano, e queremos decompô-lo em duas coordenadas cartesianas retangulares

Notação retangular de **A**: **A** = A cosθ $\boldsymbol{i}$ + A senθ $\boldsymbol{j}$ **(soma de vetores)**
Notação polar de **A**: **A** = $A \angle \theta$. O ângulo θ é medido a partir do eixo X, tomado positivo no sentido anti-horário (s.a.h.), e negativo quanto tomado no sentido horário (s.h.).

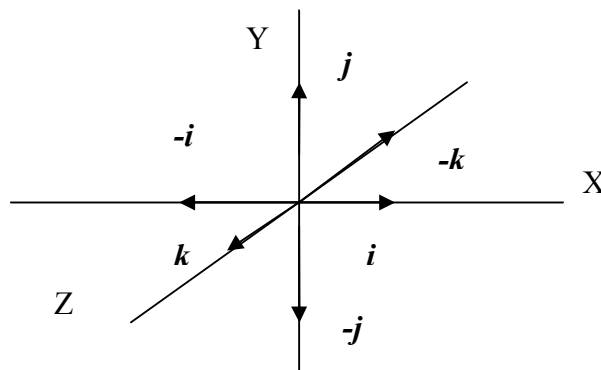
A determinação do ângulo θ é dada pela razão entre o termo em $\boldsymbol{j}$ pelo termo em $\boldsymbol{i}$**:**

$$\theta = tg^{-1} \frac{Asen\theta}{A\cos\theta}$$

Quando realizamos a soma de vetores expressos na notação retangular, somam-se os termos referentes aos respectivos vetores unitários: $\boldsymbol{i} + \boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j} + \boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k} + \boldsymbol{k}$.

1.10 Produto Vetorial – Produto Entre Dois Vetores

Considere dois vetores **A** e **B** no plano, formando um ângulo φ entre eles. A resultante do produto entre os vetores será um terceiro vetor **C** cuja linha de ação (direção) é perpendicular ao plano formado pelos vetores **A** e **B**, de módulo dado por: C = ABsenφ, e sentido dado pela regra da mão direita. Rotação de φ no sentido anti-horário – positivo (+), e sentido horário – negativo (-)

λ: vetor unitário, direção perpendicular ao plano formado por **A** e **B.** Considerando o sistema de coordenadas cartesianas e considerando $\text{sen}0^0 = 0$ e $\text{sen}90^0 = 1$, teremos:

$\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{i} = \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{j} = \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{k} = 0$ ($\text{sen}0^0 = 0$)

$\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{j} = \boldsymbol{k}$ $\quad$ $\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{i} = -\boldsymbol{k}$ $\quad$ $\text{sen } 90^0 = 1$

$\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{k} = \boldsymbol{i}$ $\quad$ $\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{k} = -\boldsymbol{j}$

$\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{i} = \boldsymbol{j}$ $\quad$ $\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{j} = -\boldsymbol{i}$

1.11 Produto Escalar entre Dois Vetores

O produto escalar entre dois vetores **A** e **B** nos dá um escalar *c* obtido pela expressão:

$c = \mathbf{A.B} = AB \cos\varphi$

Sendo $\cos 0^0 = 1$ e $\cos 90^0 = 0$, então:

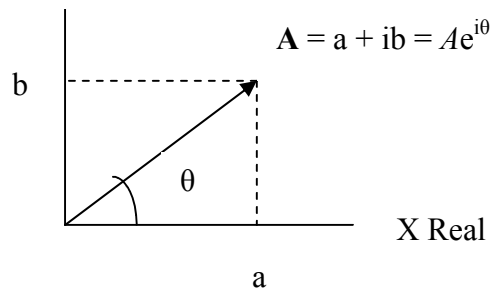
$\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{j} = \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{k} = \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{i} = 0$,

$\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{i} = \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{j} = \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{k} = 1$

1.12 Vetor no Plano – Notação Complexa

Tal como vimos, a representação vetorial no plano requer duas componentes horizontal e vertical. Qualquer vetor no plano x e y pode ser representado como um número complexo;

A = a + ib, onde i = $\sqrt{-1}$

a e b denotam as componentes x e y do vetor **A**, também denominados as partes real e imaginária do vetor **A**

A = módulo do vetor **A**

θ = argumento ou ângulo entre o vetor e o eixo X

O vetor **A** pode ser escrito como:

$\mathbf{A} = Ae^{i\theta} = A\cos\theta + iA\,\text{sen}\,\theta$

$A = \sqrt{a^2 + b^2}$

$\theta = \text{tg}^{-1}\,\dfrac{b}{a}$

2. MECANISMOS –

2.0 Algumas definições

Um mecanismo é um conjunto de elementos de máquinas ligados de forma a produzir um movimento específico. Podem ser subdivididos conforme suas aplicações: mecanismos com elementos mecânicos, hidráulicos, pneumáticos, elétricos ou combinados.

Nosso interesse localiza-se nos mecanismos com elementos mecânicos, os quais podem ser subdivididos, de uma maneira geral, em:

- Mecanismos de movimento uniforme: Engrenagens, rodas de atrito, de acoplamento flexível (correias, correntes, etc.),
- Mecanismos de movimento periódico: mecanismos de barras, mecanismos de cames.

Os mecanismos de movimento uniforme são comumente fornecidos como unidades completas de montagem. Seu estudo cinemático é mais simples, e seus problemas de aperfeiçoamento localizam-se nos materiais e na manufatura.

Os mecanismos de movimento periódico fazem parte integrante de uma máquina, e não são fornecidos como unidades pré-fabricadas e sim projetados, devido ao fato das exigências variarem de acordo com as circunstâncias, de caso a caso de projeto. Distingue-se, neste caso, o ***mecanismo de 4 barras***, também chamado de quadrilátero articulado, pois é o mais utilizado devido sua simplicidade e robustez.

A *Cinemática* é o estudo do movimento independentemente das forças que o originaram, portanto, as peças são consideradas corpos rígidos – desconsideram-se suas deformações. Na cinemática estuda-se a posição, geometria, deslocamento (translação e rotação), velocidade e aceleração.

Na *Cinemática Aplicada* estuda-se a aplicação dos conceitos da Cinemática na Síntese e Análise dos Mecanismos.

A *Síntese Cinemática*, ou Síntese Dimensional, considera a determinação da geometria básica das partes constituintes de um mecanismo, necessária para a realização de uma transmissão ou transformação específica do movimento. Pressupõe basicamente:

- Deslocamentos – O deslocamento representa a mudança de posição, independentemente do caminho percorrido. Distinguem-se os deslocamentos lineares e angulares.
- Trajetórias – A trajetória representa as posições sucessivas de um ponto móvel, ou seja, o caminho (lugar geométrico) deste ponto traçado no plano fixo.

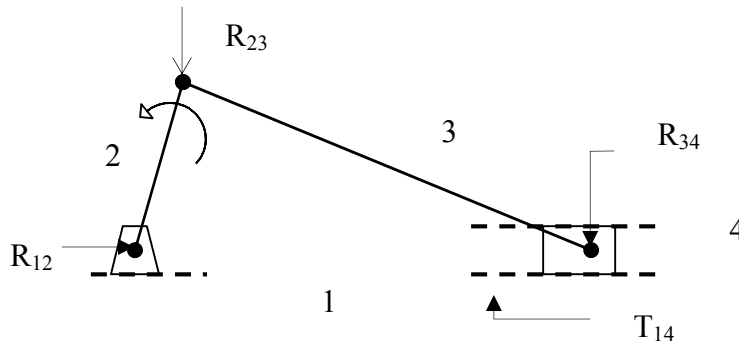
Na *Análise Cinemática* o deslocamento já não é mais considerado de ordem exclusivamente geométrica pois o *tempo* é introduzido como um novo parâmetro, resultando em duas novas grandezas cinemáticas: a *velocidade* e a *aceleração.*

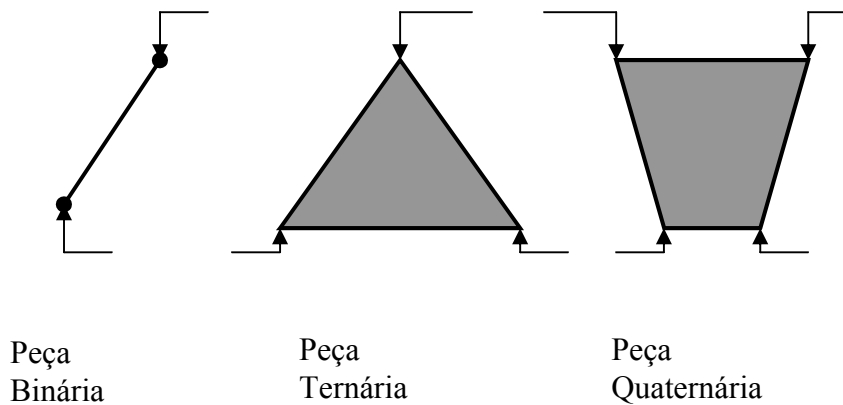
A disciplina Mecânica Aplicada abrange os conteúdos de Cinemática dos Mecanismos e Dinâmica das Máquinas, onde se incluem os conteúdos de análise estática e dinâmica dos mecanismos, além de Vibrações Mecânicas.

2.1 Noções Básicas sobre Mecanismos

Nos mecanismos, os componentes que transmitem forças ou movimentos são denominados ligações ou pinos, e para que o movimento seja transmitido os elementos devem ser ligados entre si.

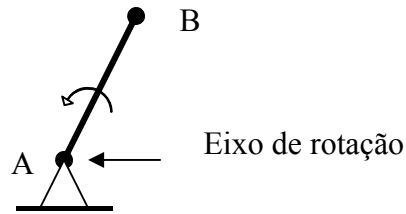
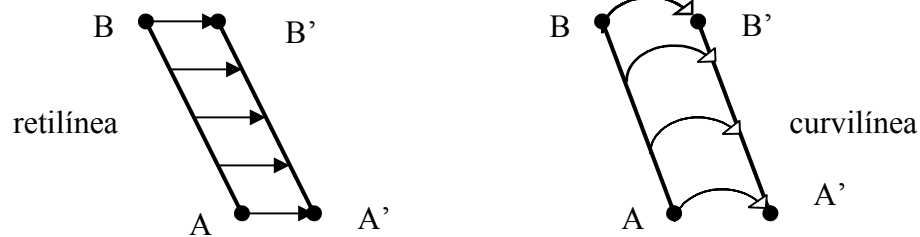
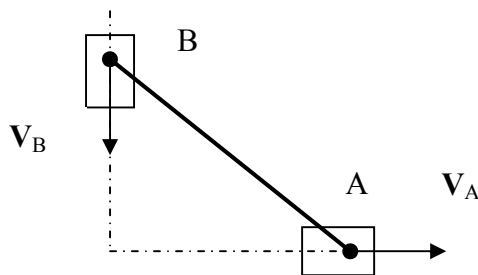
O conjunto dos elementos que estabelece o contato entre as diversas barras de um mecanismo é chamado junta cinemática ou par cinemático. A composição de peças (barras, conexões) ligadas entre si constitui uma *cadeia cinemática*, a qual transforma-se em *mecanismo* quando uma das peças se torna base (peça fixa).

Considere o mecanismo biela-manivela com corrediça, o qual é constituído por quatro elementos: O bloco ou estrutura fixa ou peça (1) que é o corpo ao qual o mecanismo está rigidamente ligado, a manivela (2), peça que imprime movimento ao mecanismo, a biela (3), peça de ligação ou acoplador, e a corrediça (4). Essas peças estão unidas por três juntas de rotação (R_{12}, R_{23}, R_{34}), e uma junta de translação (T_{14}).

As ligações ou barras podem ser binárias, ternárias, quaternárias, etc., conforme possuam dois, três ou quatro elementos de junta, ex:

Peça Binária | Peça Ternária | Peça Quaternária

Quando os diversos componentes de um mecanismo partem de uma posição, descrevem um determinado movimento e retornam à posição inicial para, deste modo, recomeçarem a mesma trajetória, diz-se que o mecanismo completou um ciclo, com a duração de um determinado período de tempo, tendo assumido fases, ou seja, várias posições instantâneas relativas durante o ciclo.

2.2 Tipos de Movimentos Planos

No movimento plano ou bidimensional, as peças de um mecanismo descrevem movimentos de rotação, translação, composto ou misto.

Rotação: Quando todas as partículas do corpo (peça) traçam trajetórias em torno de um eixo, passando pelo corpo, chamado eixo de rotação.

Translação: Quando todas as partículas do corpo (peça) apresentam uma única trajetória, podendo ser retilínea ou curvilínea.

Composto: Quando o corpo apresenta ambos os movimentos.

2.3 Juntas Cinemáticas

Em um mecanismo, para que o movimento seja transmitido, é necessário que as barras estejam ligadas entre si por juntas ou pares cinemáticos. Cada tipo de junta tem suas próprias características, as quais determinam o tipo de movimento existente entre os corpos e, pelo critério de Reuleaux, baseado no tipo de contato entre dois elementos, elas podem agrupar-se em duas classes: ***juntas superiores*** e ***juntas inferiores.***

Nas juntas superiores o contato é pontual ou linear, como por exemplo o contato entre os dentes de um par de engrenagens, entre duas rodas de atrito, entre o rolamento de

agulha e a pista do rolamento, entre o came e o seguidor, etc. Nesses tipos de juntas as superfícies estão sujeitas a tratamento térmico ou de superfície.

Nas juntas inferiores o contato é uma superfície, e as comumente utilizadas são as juntas cinemáticas de rotação (pino ligando duas barras nas quais as posições angulares variam), e as de translação (cursor em translação- movimento de escorregamento), podendo ser citadas também as juntas esféricas ou globular (homocinética), helicoidal ou parafuso, etc.

Os termos *superiores* e *inferiores* derivam-se do fato de que as juntas superiores são de fabricação e constituição de material mais complexas, portanto, mais nobres, superiores, ao passo que as juntas inferiores são mais fáceis de se obterem, menos nobres, e por isso, inferiores.

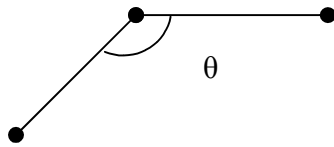
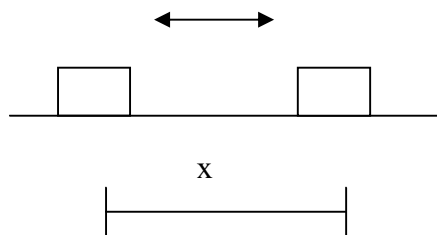
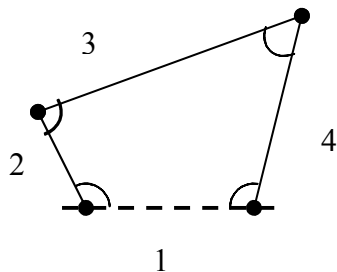
2.4 Graus de Liberdade ou de Mobilidade

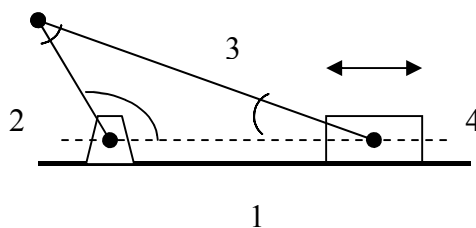
De uma maneira geral, graus de liberdade (GDL) são representados pelo número de coordenadas independentes, necessárias para especificar a posição de um corpo ou sistema mecânico no plano ou no espaço.

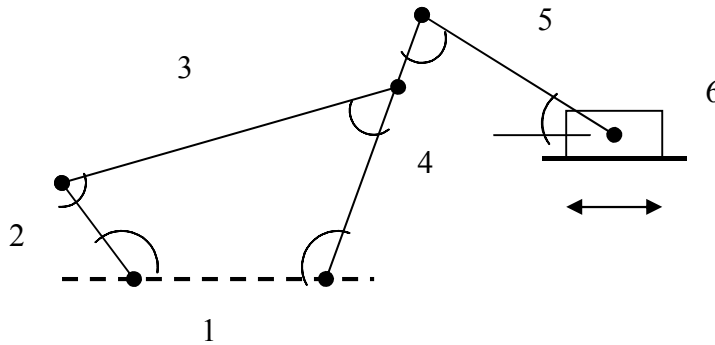
Pode ser definido também como o número de movimentos de acionamento que um determinado mecanismo necessita, para que a localização de suas peças seja completamente conhecida em relação a um referencial pré-definido. O número de graus de liberdades, de uma maneira geral, para um mecanismo fechado, pode ser determinado pelo critério de Grubler, onde:

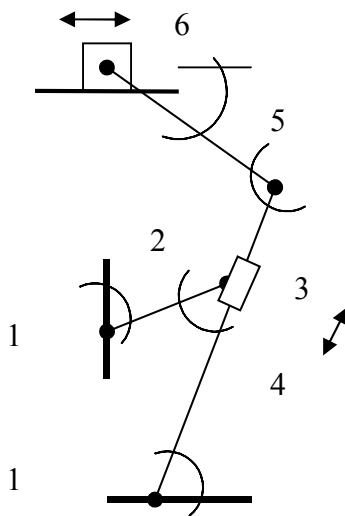
$$GDL = 3(n - 1) - H - 2L$$

n = número de peças,
H = número de juntas superiores,
L = número de juntas inferiores.

Revoluta – movimento de rotação: 2 barras descrevem movimento de rotação em torno de um pino, L = 1.

Prismático – movimento de translação , L = 1

a) Mecanismo de 4 barras, 4 peças, todas binárias - 2 peças descrevem um ângulo de rotação em torno de cada articulação (pino).

n = 4, H = 0, L = 4 .... GDL = 1

b) Mecanismo biela manivela, 4 peças

n = 4, H = 0, L = 4 (3 ângulos de rotação + 1 componente de translação)....GDL = 1

c) Mecanismo de retorno rápido, 6 peças

n = 6, H= 0, L = 7 (6 ângulos de rotação + 1 componente de translação)......GDL = 1

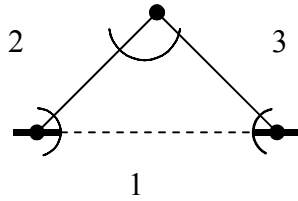
d) Mecanismo de retorno rápido – plaina limadora, 6 peças

n = 6, H = 0, L = 7 (5 ângulos de rotação + 2 componentes de translação).......GDL = 1

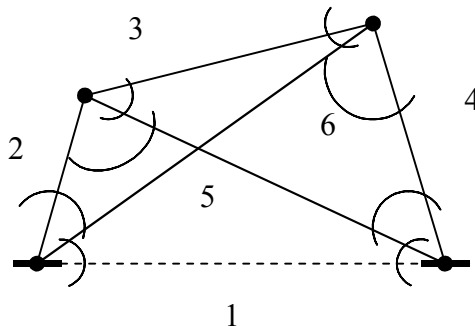
De uma maneira geral, temos:

Se GDL $\rangle$ 0, o sistema é um mecanismo com GDL graus de liberdade;

Se GDL = 0, o sistema é uma estrutura estaticamente determinada;

Se GDL $\langle$ 0, o sistema é uma estrutura estaticamente indeterminada.

e) Estrutura isostática

n = 3, H = 0, L = 3 (3 ângulos de rotação) .... GDL = 0

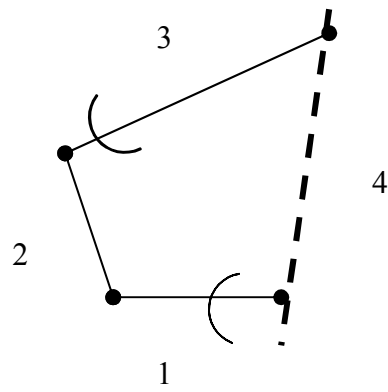
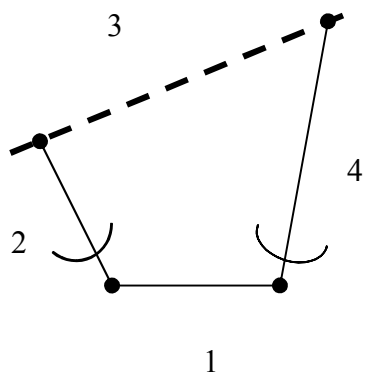
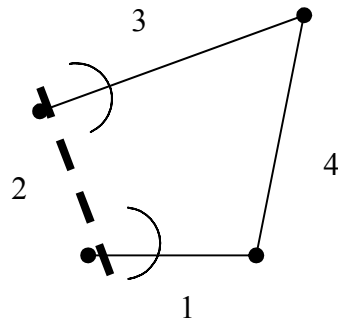
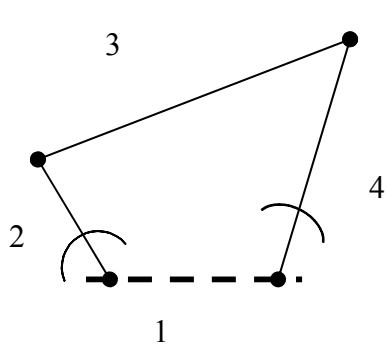
f) Estrutura Hiperestática

n = 6, H = 0, L = 8 (8 ângulos de rotação - 2 em cada pino) ....GDL = -1

2.5 Inversão Cinemática

A inversão de um mecanismo não altera o movimento relativo entre as barras, mas modifica o movimento absoluto de cada barra relativamente a um referencial fixo.

Fixando-se as peças diferentes em sequência, ou seja, invertendo a base, pode-se criar uma variedade de mecanismos com diferentes características de transmissão. A técnica é útil para o desenvolvimento de mecanismos novos ou solução de problemas da síntese e análise cinemática.

Pelo fato do mecanismo de quatro barras possuir quatro elementos, significa que há três inversões possíveis, correspondentes à fixação das barras 2, 3 e 4, exemplos:

3
4
2
1
3
2
4
1
3
4
2
1
3
4
2
1

3. - MECANISMOS ELEMENTARES

3.1 Algumas definições

Um critério de classificação dos mecanismos é que tem como base o tipo de transformação do movimento entre os órgãos motor e movido. Os mecanismos podem transformar movimento de:

- *Rotação* em *rotação* como um par de engrenagens (motora e movida), a polia motora – correia – polia movida, mecanismo de 4 barras (manivela – balancim), etc.
- *Rotação* em *translação* como em manivela – corrediça, came – seguidor, morsa (parafuso - garra), etc.
- *Translação* em *translação* como em peças deslizantes ligadas por uma barra, came de translação (perfil inclinado deslizante) e seguidor, etc.

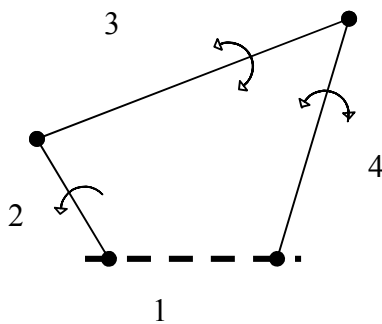
Em muitas aplicações práticas, um único mecanismo pode não permitir a realização do efeito cinemático desejado, neste caso, procura-se combinar os mecanismos de movimento periódico entre si em composições.

A aplicação dos mecanismos tem sido dos mais variados possíveis, abrangendo praticamente todos os setores da engenharia mecânica tais como:

- Máquinas industriais como as têxteis, as operatrizes, os manipuladores e dispositivos de manufatura, acionadores de prensa, de impressão, de embalagem, etc.
- Máquinas e implementos agrícolas,
- Veículos automotivos – suspensão dianteira e traseira, sistema de direção, de embreagem, do acelerador, limpador de parabrisa, levantador de vidro, dobradiças, etc.
- Guindastes e máquinas rodoviárias,
- Aparelhos de biomecânica,
- Brinquedo mecanizado,
- Utilidades domésticas, etc.

3.2 Mecanismo de Quatro Barras ou Quadrilátero Articulado

O mecanismo de quatro barras é o mais comum e o mais simples dos mecanismos articulados, sendo que os demais mecanismos podem ser obtidos a partir dele. Sua principal característica reside no fato de que apresenta diferentes relações geométricas entre as barras, e diferentes relações entre o tipo de movimento de entrada e saída. É constituído por quatro barras ou peças, sendo uma fixa (barra 1), uma motora (barra 2), uma intermediária (barra 3) e uma movida (barra 4).

A barra 1 – fixa, é a estrutura que suporta o mecanismo. A barra 2 denomina-se manivela pois é a barra que imprime movimento ao mecanismo, e tem movimento de rotação em um sentido. A barra 3 denomina-se acoplador pois é a peça que acopla a manivela às demais peças do mecanismo, apresentando movimentos de translação e rotação nos dois sentidos, e a peça 4 denomina-se oscilador ou barra oscilante quando descreve movimento de rotação nos dois sentidos e, obviamente sem translação, pois está articulada à estrutura fixa.

3.3 Regra de Grashof

Em projetos de mecanismos busca-se a simplicidade. A menor quantidade de peças que podem realizar um trabalho geralmente fornece a solução mais barata e confiável, e o *mecanismo de quatro barras* deve estar entre as primeiras soluções propostas.

Em geral, a manivela é acionada por um motor com movimento contínuo em um único sentido, descrevendo um ângulo de 360^0 em torno de um eixo passando pela articulação com a peça 1. Para que o movimento se complete e não haja travamento, a chamada *regra de Grashof* de aplica:

"*para mecanismos de quatro barras que descrevem movimento plano, se a soma dos comprimentos das barras mais curta e mais comprida for inferior ou igual à soma dos comprimentos das duas barras restantes, então a barra mais curta pode rodar continuamente*", ou seja:

$$\boldsymbol{S + L \leq P + Q}$$

S é o comprimento da barra menor, ***L*** é o comprimento da barra maior, ***P*** e ***Q*** são os comprimentos das barras remanescentes. Os mecanismos que obedecem a essa relação são chamados de Mecanismos de Grashof, e os que não obedecem são chamados de Mecanismos de não-Grashof.

Quando uma barra realiza uma rotação completa o mecanismo atende à condição de Grashof, e a cadeia cinemática é chamada de **Classe I. S+L** menor que **P+Q.**

$$\boldsymbol{S + L \langle P + Q}$$

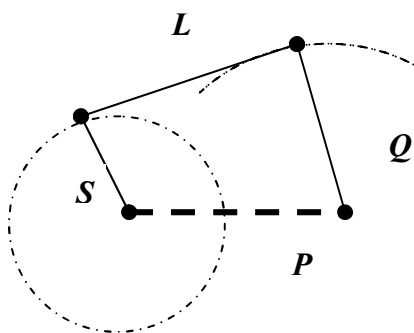
Quando nenhuma barra é capaz de girar totalmente em torno de um pino ou articulação ou junta a equação acima não se aplica, e o mecanismo é chamado de não-Grashof, e a cadeia cinemática é chamada de **Classe II. S+L** maior que **P+Q**

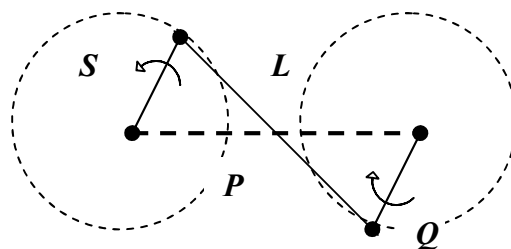
$$\boldsymbol{S + L \rangle P + Q}$$

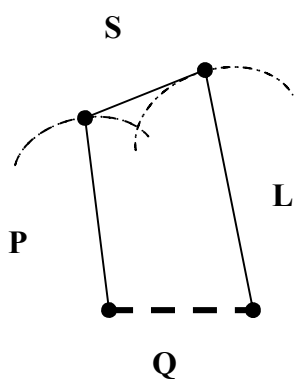
Quando a equação acima se iguala o mecanismo é chamado caso especial de Grashof ou de **Classe III,** e as configurações são chamadas de dupla manivela.

$$\boldsymbol{S + L = P + Q}$$

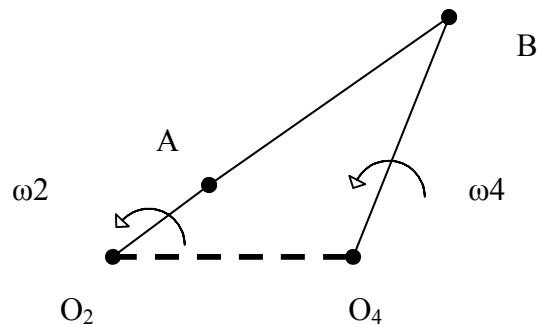
Mecanismos de quatro barras de Grashof

Classe I

Mecanismo de manivela barra oscilante

Classe III

Mecanismo de dupla manivela

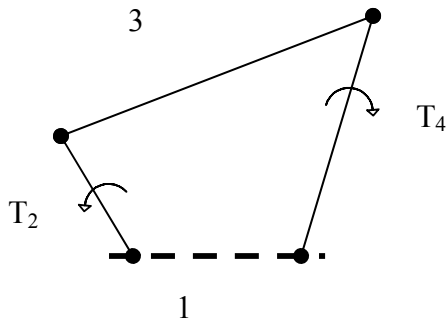
Mecanismo de não-Grashof – **Classe II**

Mecanismo de dupla barra oscilante

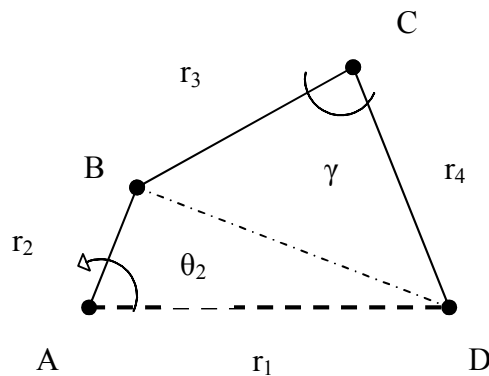
3.4 Fase de Ponto Morto

No mecanismo de quatro barras é possível, dada sua configuração, que duas de suas barras estejam alinhadas uma com a outra, como indica a figura abaixo:

Quando isso ocorre, a velocidade angular da barra 4 (ω_4) passa por zero e, se for aplicado um momento na barra 4, (BO_4), a barra 2 (AO_2), estará submetida somente a tração ou compressão de forma que ela não sofrerá qualquer movimento. Nesta situação o mecanismo estará na posição chamada de *ponto morto*. As fases de ponto morto devem ser evitadas a fim de minimizar esforços nas barras e nas juntas.

3.5 Índices de Mérito

Em um dado mecanismo de quatro barras obedecendo a regra de Grashof, isto é, a barra 2 completando um giro de 360^0, e desconsiderando as foras de atrito e de inércia, a relação entre o conjugado aplicado à barra 2 (T_2), conjugado de entrada, necessário para acionar a barra 4 e vencer o conjugado resistente (T_4), estabelece o conceito de *vantagem mecânica* (VM), que é a razão entre o conjugado resistente e o conjugado de entrada.

$$\text{VM} = \frac{T_4}{T_2} = \frac{\omega_2}{\omega_4}$$

A vantagem mecânica está relacionada com o chamado *ângulo de transmissão*, o qual é medido entre a barra intermediária (3) e a barra movida (4). Esses conceitos serão aplicados no tópico Análise Estática em Mecanismos Articulados, porém, algebricamente, podemos determina-lo:

No mecanismo de 4 barras abaixo, o ângulo γ é o chamado ângulo de transmissão e, aplicando a lei dos cossenos para os triângulos ABD e BCD, teremos:

$(BD)^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2.r_1.r_2.\cos\theta_2,$

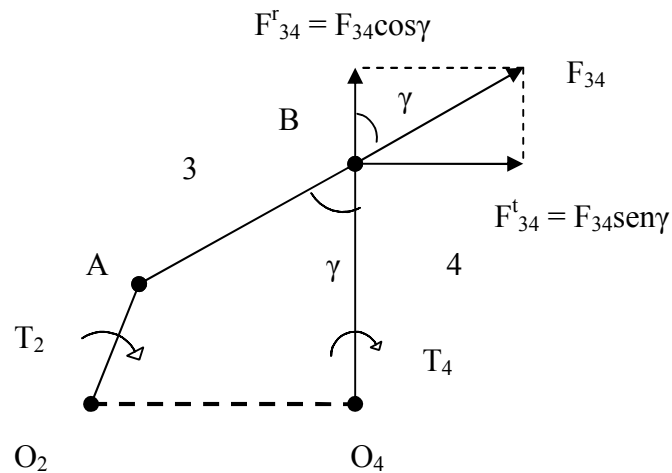
$(BD)^2 = r_3^2 + r_4^2 - 2.r_3.r_4.\cos\gamma$

Igualando as duas equações e resolvendo em função da variável γ:

$$\gamma = \cos^{-1}\left[\frac{r_3^2 + r_4^2 - r_1^2 - r_2^2 + 2r_1 r_2 \cos\theta_2}{2r_3 r_4}\right]$$

O ângulo de transmissão (γ) deve estar no intervalo aproximado entre 40^0 ou 50^0 e 140^0 pois, dado que fora deste intervalo as barras intermediárias (3) e movida (4) podem ficar alinhadas, coincidentes entre si, tornando o ângulo γ igual a zero, e o mecanismo se travaria ou emperraria. Além do mais, será possível provar que quando $\gamma = 90^0$, para um

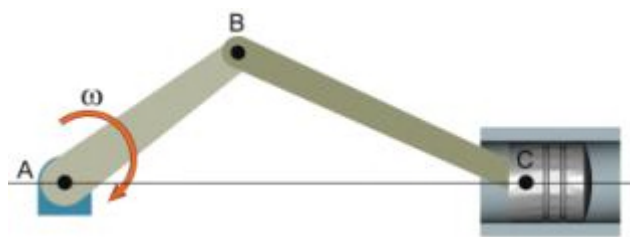
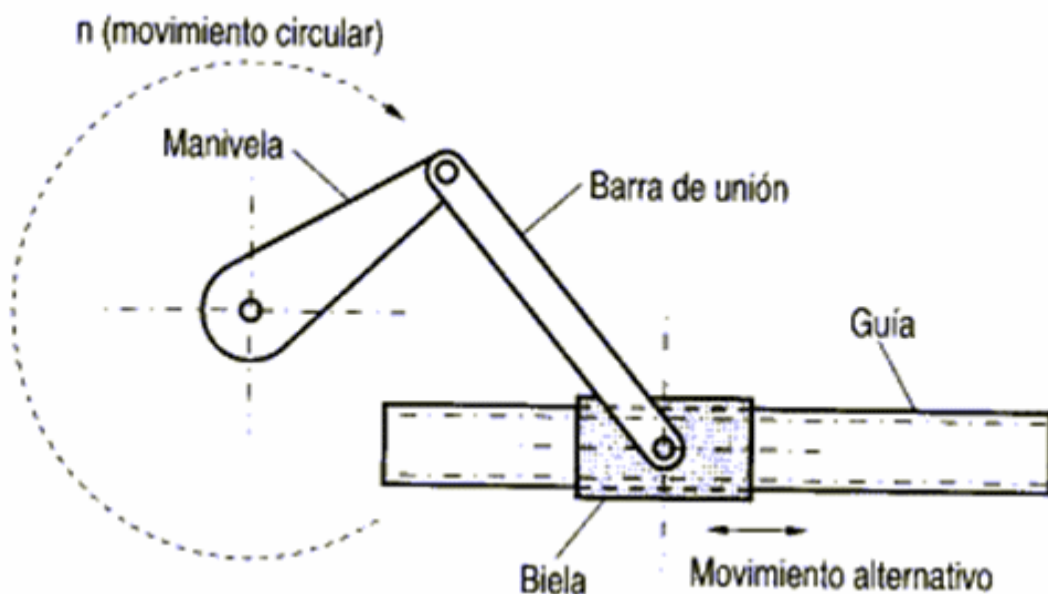
dado conjugado resistente (T_4), aplicado na barra 4, a força exercida na barra intermediária (3) será mínima tornando esse ângulo a de melhor vantagem mecânica.

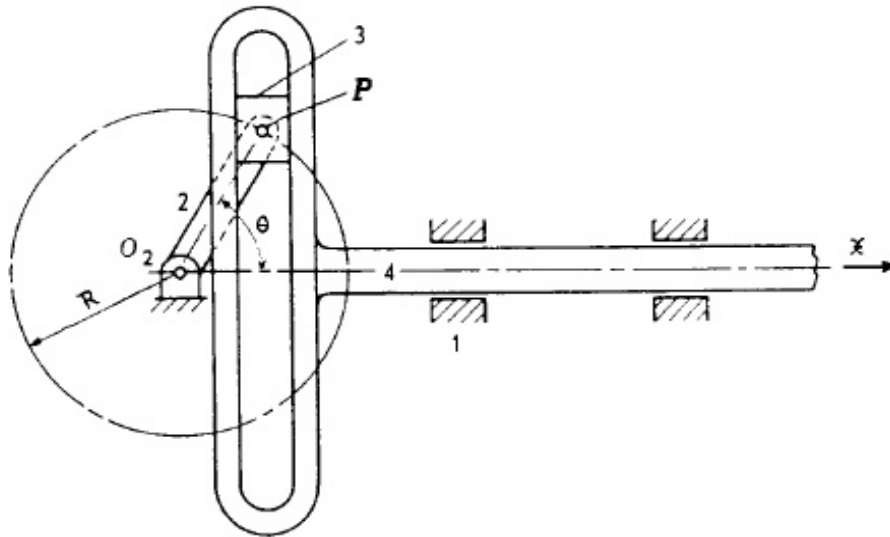
Quando é aplicado um torque T_2, e mesmo antes de qualquer movimento ocorrer, surgirá uma força colinear estática F_{34} aplicada pela barra 3 à barra 4 no ponto B. as componentes de F_{34} podem ser decompostas nas componentes radial (F^r_{34}) e tangencial (F^t_{34}), decompostas paralela e tangencialmente.

O ideal seria que toda a força F_{34} produzisse o torque de saída T_4, porém, somente a força tangencial gera esse torque. A força radial F^r_{34} fornece somente tração ou compressão na barra 4, contribuindo com o atrito na junta B; por esta razão, o valor ideal para o ângulo de transmissão (γ) é 90^0.

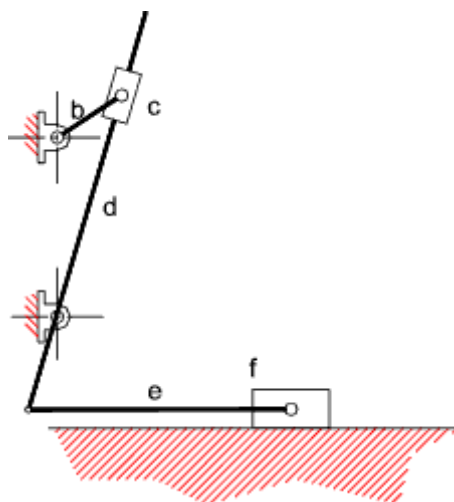
Quando o ângulo for menor que 45^0, a componente radial é maior que a componente tangencial como pode ser verificado trigonometricamente, o que reduz significativamente a vantagem mecânica. Dado que o mecanismo se movimenta, o ângulo de transmissão é variável e por essa razão, o ângulo de transmissão mínimo para uma boa condição de projeto deve ser maior que 40^0.

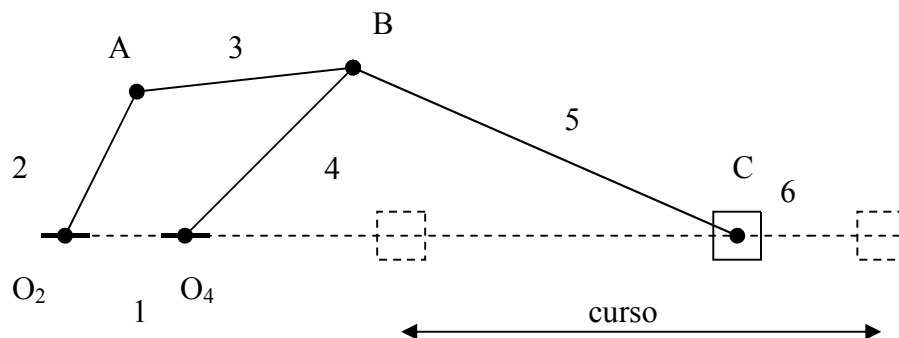
3.6 Aplicações e Configurações de Mecanismos Articulados

Existem várias aplicações em diferentes configurações de mecanismos articulados, e o aluno deverá buscar na literatura as representações e as respectivas utilidades, porém, é possível aqui citar algumas específicas:

Mecanismo Pistão- Biela-Manivela:
Largamente utilizado principalmente em motores de combustão interna e compressores. Transforma o movimento de rotação da manivela em translação do pistão e vice-versa.

Mecanismo Biela-Manivela com excentricidade:
Existe uma excentricidade entre o eixo de rotação da manivela e a linha de ação da corrediça; também é utilizado como mecanismo de retorno rápido.

Mecanismo Scotch-Yoke

O mecanismo fornece o movimento harmônico simples, utilizado em bombas a vapor, é uma variante do mecanismo biela-manivela onde a manivela tem comprimento infinito transformando-se em uma corrediça.

Mecanismo de Whitworth

Esse mecanismo é uma variação da inversão do mecanismo biela-manivela, onde se considera fixa a manivela. Tanto a barra **b** quanto a barra **d** descrevem movimento de rotação contínua, sendo consideradas manivelas, e a corrediça **f** está condicionada ao movimento giratório da manivela **d**. É frequentemente utilizada em máquinas ferramentas, em particular em máquinas da industria têxtil.

Mecanismo de Avanço

Mecanismo derivado de um sistema articulado de quatro barras de dupla manivela, onde a barra 2 é o órgão motor girando com velocidade angular constante. O cursor 6 move-se com velocidade aproximadamente constante na maior parte do avanço, e será mais lento para o retorno rápido quando a barra 2 gira no sentido horário. Dentre os mecanismos de retorno rápido, é o único que não possui juntas cinemáticas de translação ou deslizantes entre as barras que constituem o mecanismo base.

3.7. Algumas Noções Sobre Metodologias de Projeto

Um projeto de engenharia envolve algumas atividades do tipo *design* (projeto) que significa designar ou marcar, e pode ser definido como esboçar, desenhar, conceber, inventar, planejar uma ação de trabalho, etc. *Engineering design* (projeto de engenharia) é o processo de aplicação de diversas técnicas e princípios científicos, com o objetivo de definir um processo ou sistema suficientemente detalhado para permitir sua realização, podendo ser simples ou complexo, matemático ou não matemático, fácil ou difícil.

Os projetos de engenharia normalmente constituem-se em um problema não estruturado, isto é, identifica-se uma necessidade, algo como um tipo de máquina a resolver um determinado trabalho. Isto é um problema pouco definido, difícil de ser resolvido, por isso, é necessário estruturar problemas desestruturados. Norton (2010) relaciona etapas de um tipo de metodologia:

- ***Identificação da necessidade***

"*Nós precisamos de*..." Este é um problema não estruturado pois indica a necessidade de uma máquina para resolver determinada tarefa, ou do desenvolvimento de um dispositivo a ser acoplado em uma determinada máquina, mas é possível perguntar: Que tipo de máquina ou dispositivo será esse? Como irá funcionar? Quais serão os elementos mecânicos, elétricos, hidráulicos, etc. necessários?

- ***Pesquisa preliminar***

Essa etapa significa identificar se o problema ou outro parecido já foi solucionado, ou seja, *não se reinventa a roda*. Se a máquina já existe no mercado é mais econômico comprá-la que produzi-la e, além disso, aprende-se muito na resolução de um projeto ao estudar um produto ou tecnologia similar à procurada, sendo comum o processo de comprar um produto, desmonta-lo e estuda-lo. No processo de pesquisa, a internet é uma fonte muito útil assim como publicações técnicas e checagem de patentes.

- ***Estabelecimento do objetivo***

Uma vez entendido o que se quer e resolvido esse problema teórico, é necessário estabelecer o objetivo o qual deve ser conciso, porém, sem prever a solução. Deve ser guiado pela *visualização funcional*, a qual requer outro objetivo: como projetar *um modo* de resolver uma determinada tarefa estabelecida nos dois itens anteriores, necessitando para isso pensar, idealizar maneiras de resolução, ou seja, como o objetivo deve ser alcançado, como selecionar o problema, como ele pode ser solucionado, realçando as soluções mais baratas porém efetivas. O projeto final deve ser comparado com o objetivo.

- Idealização

A idealização é um processo difícil pois envolve a criatividade. O processo criativo significa gerar idéias sem julgar suas qualidades. Todas devem ser acolhidas pois mesmo as mais pífias poderão gerar novas idéias; no processo de criação em grupo utiliza-se a técnica de *brainstorming* (tempestade de idéias). Trabalhando sozinho, técnicas de analogias e sinônimos são úteis, exemplo:

Mova um objeto do ponto A ao ponto B. Sinônimos de mover são empurrar, puxar, deslizar, impelir, jogar, ejetar, pular, transbordar. É necessário, portanto, deixar abrir o espectro de possibilidades físicas para a solução da tarefa, cumprir o objetivo a ser realizado.

- Análise

Uma vez estruturado o problema, idealizado a solução ou a construção do projeto ou te-lo esboçado mesmo que temporariamente, é necessário estudar seu desempenho. Das várias soluções pensadas como vários projetos, são necessárias a elaboração de itens a fim de comparações na busca de melhor solução, sendo necessária a construção de uma *matriz de tomada de decisões* utilizando fatores de ponderação os quais medem a importância relativa do quesito, relacionados como o custo, segurança, desempenho, confiança, ergonomia, etc. em uma linha e, em uma coluna estarão dispostos os projetos ou soluções pensadas.

Note que a matriz a ser elaborada relacionando os fatores de ponderação e itens ou quesitos são variáveis de acordo com o projeto, e há muita literatura disponível sobre o assunto.

Figura 3.1: Matriz de tomada de decisões

	Custo	*Segurança*	*Desempenho*	*Confiança*	*Ergonomia*	*Total*($\sum$)
Fator de Ponderação	0,xx	0,yy	0,zz	0,uu	0,vv	1,0
Projeto 1						
Projeto 2						
Projeto 3						

- Seleção

Uma vez que, pela análise, destacou-se um projeto potencialmente viável, ele deve ser selecionado para o projeto detalhado, prototipagem e teste.

- *Projeto detalhado:* Inclui a criação de conjuntos completos de desenhos de montagem, desenhos de cada peça utilizada no projeto. Os desenhos de detalhe devem especificar as dimensões e o material necessário para produzir a peça.

- *Prototipagem:* Ocorre que fundamentalmente não se tem certeza se o projeto é viável, correto, se funcionará como projetado até que seja montado e testado. Em projetos de mecanismos de barras é possível construir modelos com papelão duro em escalas compatíveis para testar os movimentos e as funções do projetado.

Teste: Verificar a atuação, verificar o funcionamento para vincular a ele elementos de instrumentação para tornar precisos parâmetros como deslocamentos, velocidades, acelerações, forças, torques, temperaturas, etc., é possível utilizar o computador para monitoramentos de precisão a custos reduzidos.

- Relatório técnico

A apresentação de idéias e resultados está contida no relatório técnico. Disciplinas como Metodologia do Trabalho Científico especificam suas normas de construção, as etapas

contendo memorial de cálculo e, também algo muito importante, escrito sem erros ortográficos.

- Unidades

O sistema de unidades utilizado é o Sistema Internacional (SI). A constante gravitacional é aproximadamente 9,81 m/s^2, massa, comprimento e tempo são unidades fundamentais e força é uma unidade derivada. Note: em cálculos dinâmicos não se usa milímetro (mm) e sim metro (m). Em uma equação escrita corretamente, todas as unidades de cada lado da igualdade devem ser anuladas, caso contrário, algo deve estar incorreto.

Tabela 3.1: ***Variáveis e unidades***

Variável	**Símbolo**	**Unidade no SI**
Força	F	newtons (N)
Comprimento	l	metros
Tempo	t	segundos (s)
Massa	m	quilogramas (kg)
Peso	W	newtons (N)
Velocidade	v	m/s
Aceleração	a	m/s^2
Pulso	j	m/s^3
Ângulo	θ	graus (^{o})
Ângulo	θ	radianos (rad)
Velocidade angular	ω	rad/s
Aceleração angular	α	rad/s^2
Pulso angular	φ	rad/s^3
Torque	T	N.m
Momento de inércia de massa	I	$N.m.s^2$
Energia	E	joules (J)
Potência	P	watts (W)
Volume	V	m^3
Peso específico	γ	N/m^3

Densidade	ρ	kg/m³

4. - POSIÇÃO E DESLOCAMENTO

Em cinemática, a análise do deslocamento refere-se à determinação das posições ocupadas por qualquer um ou por todos os pontos de uma peça de um mecanismo quando este se move descrevendo um ciclo de operação. Tal análise é necessária para se determinar as posições angulares de cada barra para uso posterior nas análises de velocidade, aceleração e forças, ou para traçar a trajetória de um ponto em uma dada peça. Em análise de deslocamento as peças são rígidas e os comprimentos conhecidos.

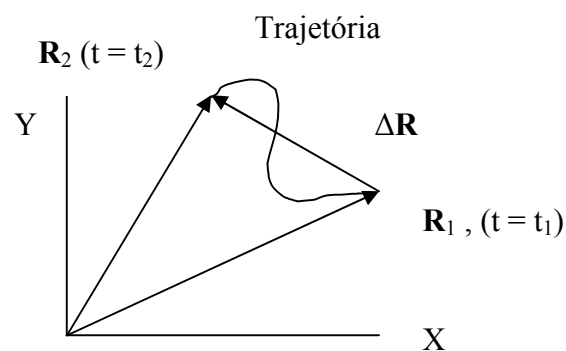
Corpo rígido: Aplicando-se uma força externa ao corpo, a distância entre dois pontos, contidos no corpo, permanece constante.

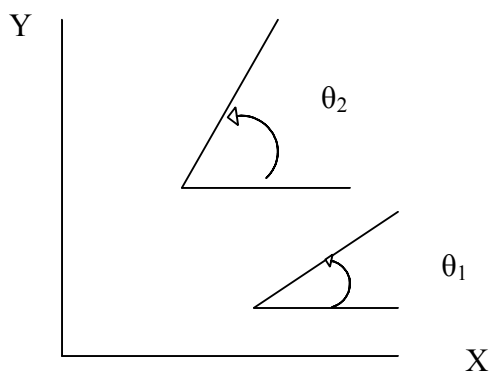
Trajetória: Constitui-se nos lugares geométricos ocupados pelo ponto em movimento.

Distância percorrida pelo corpo: Em um intervalo de tempo t_1 a t_2, é o comprimento medido sobre a trajetória, entre duas posições referentes a esse intervalo de tempo. Comprimento é uma grandeza escalar.

Deslocamento de um ponto: É um vetor que expressa a posição final do ponto em relação à sua posição inicial.

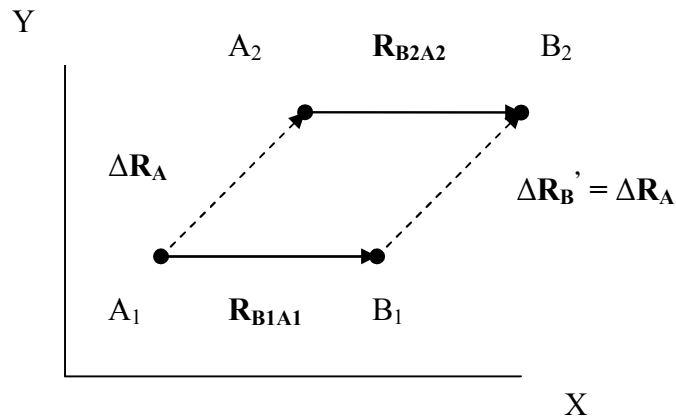
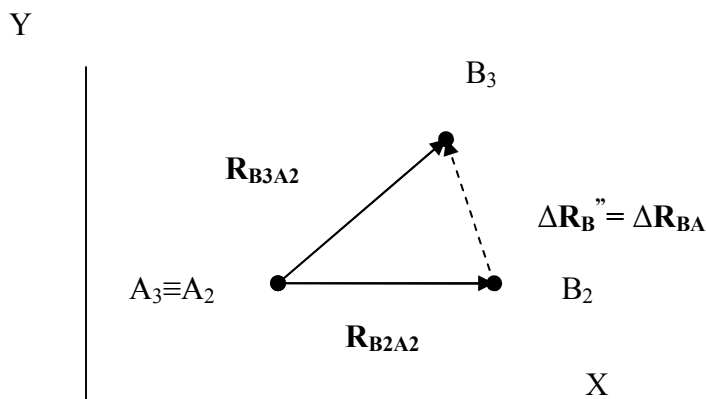
4.1 Deslocamento Absoluto

Considere um ponto movendo-se no plano, da posição 1 ($t = t_1$) para a posição 2 ($t = t_2$), ao longo de uma trajetória qualquer.

$\mathbf{R}_1$ e $\mathbf{R}_2$: são chamados vetores posição, pois definem as posições do ponto nos instantes 1 e 2 em relação à origem do centro de coordenadas X e Y.
$\Delta\mathbf{R}$: chamado vetor deslocamento.

Da figura temos: $\mathbf{R}_2 = \mathbf{R}_1 + \Delta\mathbf{R}$, portanto, $\Delta\mathbf{R} = \mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1$ (translação)

Da figura, $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$ (deslocamento de rotação)

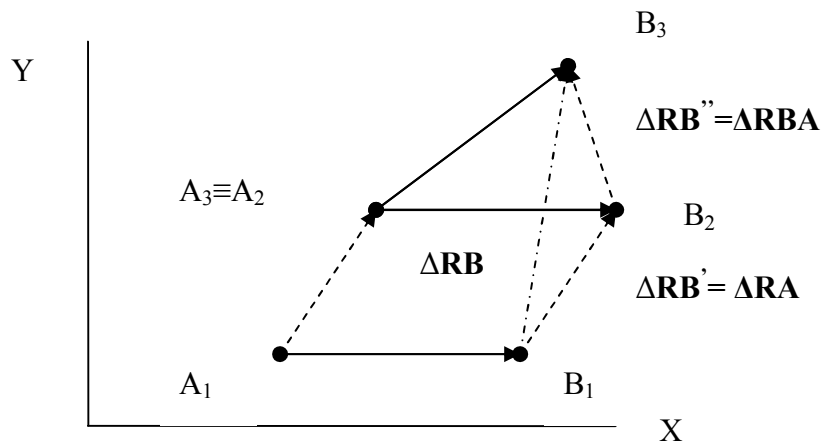
4.2 Deslocamento Relativo

Considere um corpo rígido, e localizando dois pontos A e B neste corpo, o qual desloca-se em movimentos de translação e rotação no plano. Queremos descrever uma equação que expresse o deslocamento total do ponto B entre as posições inicial e final.

Translação: O corpo desloca-se da posição 1 para a posição 2

Rotação: O corpo desloca-se da posição 2 para a posição 3, girando em torno de um eixo que passa pelo ponto A_2.

Da figura, $\mathbf{R_{B3A2}} = \mathbf{R_{B2A2}} + \mathbf{\Delta R_{BA}}$, portanto, $\mathbf{\Delta R_{BA}} = \mathbf{R_{B3A2}} - \mathbf{R_{B2A2}}$

Movimento geral: O corpo descreve os movimentos de translação e rotação, e o deslocamento total do ponto B é dado por:

$\mathbf{\Delta RB} = \mathbf{\Delta RB}' + \mathbf{\Delta RB}''$ ou

ΔRB = ΔRA + ΔRBA – Equação do Deslocamento Relativo. O vetor **ΔRBA** representa o deslocamento de **B** em um sistema de coordenadas não rotativo, cuja origem está em **A**.

Em cinemática, análise de deslocamento refere-se à determinação das posições ocupadas por alguns ou todos os pontos de barras de um dado mecanismo, o qual se move através de um ciclo de operação. Tal análise é necessária para determinar as posições angulares de cada barra para uso posterior em análises de força, velocidade e aceleração, ou para traçar a trajetória de um ponto acoplado à barra.

Um mecanismo é dito haver completado um *ciclo* de operação quando move-se através de todas as possíveis posições e retorna à posição original. Qualquer posição antes de se completar um ciclo é referida como sendo *fase.*

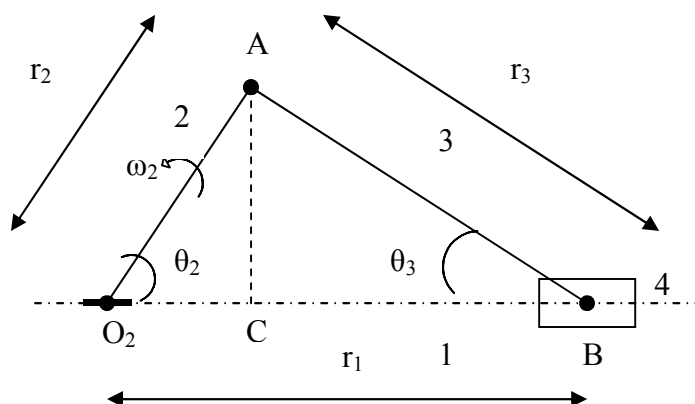
Para análise de deslocamento assume-se que o comprimento de todas as barras sejam conhecidos, e que todas sejam rígidas. Esta análise pode ser realizada por métodos gráficos os quais baseiam-se na interpretação geométrica do mecanismo e uso de desenho auxiliado por computador, pelo método da notação vetorial, e por métodos analíticos. A utilização de algum método analítico possibilita a construção de algoritimos para o desenvolvimento de programas de uso computacional.

4.3 Métodos Analíticos para a Determinação de Posições

4.3.1 Análise de Posição de um Mecanismo Biela-Manivela

O problema, para análise de posição e deslocamento, consiste na localização dos vários pontos de interesse do mecanismo, para tanto, deduz-se expressões analíticas capazes de expressar a posição de um determinado corpo, exemplo manivela, ou o ponto em um corpo, em função da configuração geométrica do mecanismo e do tipo de acionamento.

4.3.1.1 Método Algébrico

Considere o mecanismo biela-manivela, e pretende-se determinar a posição do pistão (corrediça) localizada pelo ponto B, o qual representa seu centro de massa. A manivela (barra 2) é a barra motora girando em torno de O_2 com velocidade angular conhecida, tal que: $\omega_2 t = \theta_2$.

Escrevemos as expressões através das relações trigonométricas expressas pelas leis do seno e cosseno, e pelas projeções cartesianas. Podemos escrever para o ponto B em relação a O_2:

$r_1 = O_2C + CB = r_2\cos\theta_2 + r_3\cos\theta_3$.. eq.4.1

O mecanismo biela-manivela tal como visto no item **2.4** tem um grau de liberdade, e as coordenadas ou variáveis θ_2 e θ_3 não são independentes, ou seja, θ_3 depende de θ_2. Podemos também escrever:

$AC = r_2\text{sen}\theta_2 = r_3\text{sen}\theta_3$ (lei dos senos)

Isolando $\text{sen}\theta_3$: $\text{sen}\theta_3 = \frac{r_2}{r_3}\text{sen}\theta_2$

Substituindo esta expressão na lei fundamental da trigonometria,

$\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$, ou, $\cos\theta = \sqrt{1 - sen^2\theta}$:

$\cos\theta_3 = \sqrt{1 - \frac{r_2^2}{r_3^3} sen^2\theta_2}$ ....eq. 4.2

Inserindo a eq. 4.2 em 4.1, obtemos:

$r_1 = r_2\cos\theta_2 + r_3\sqrt{1 - \frac{r_2^2}{r_3^3} sen^2\theta_2}$, a qual pode ser reescrita:

$r_1 = r_2\cos\theta_2 + \sqrt{r_3^2 - r_2^2 sen\theta_2}$ eq.4.3

onde θ_2 equivale e pode ser substituído por $\omega_2 t$

4.3.1.2 Método da Notação Complexa

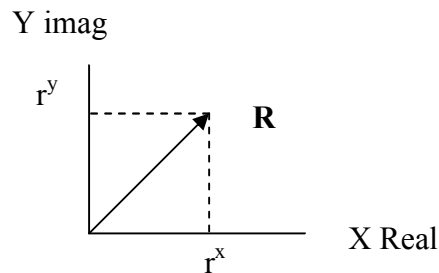
A equação 4.3 acima pode ser escrita através da notação complexa. Com o fim de relembrarmos a manipulação complexa, escrevemos:

R = $r^x + ir^y$

R: vetor que representa o número complexo,

r^x e r^y: representam respectivamente a parte real e a parte imaginária,

i: representa a unidade imaginária tal que i = $\sqrt{-1}$

O vetor **R** representado no espaço complexo:

O módulo de **R** é dado por:

r = $\sqrt{(r^x)^2 + (r^y)^2}$

O vetor **R** pode ser escrito em notação complexa e coordenadas polares:

R = rcosθ + isenθ, ou

R = r(cosθ + isenθ) = $re^{i\theta}$

Das séries numéricas de MacLaurin, temos:

$$e^{i\theta} = 1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2!} - \frac{i\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + \frac{i\theta^5}{5!} - \frac{\theta^6}{6!} - \frac{i\theta^7}{7!} + \ldots$$

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \ldots$$

$$i\text{sen}\theta = i\theta - \frac{i\theta^3}{3!} + \frac{i\theta^5}{5!} - \frac{i\theta^7}{7!} + \ldots$$

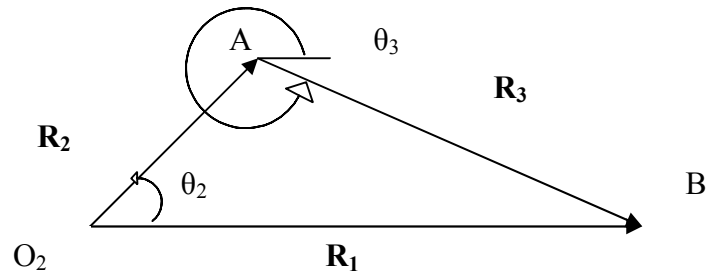
Lembre-se que:

2! (2 fatorial = 2x1)

3! (3 fatorial = 3x2x1)

4! (4 fatorial = 4x3x2x1).. e assim por diante. O ângulo θ é expresso em radianos.

Provar que: cos 20^0 = 0,9396926, e que sen20^0 = 0,3420201

As barras do mecanismo biela-manivela descrito no método algébrico acima estão sendo representadas por vetores posição, formando uma cadeia cinemática fechada.

Da figura podemos escrever a soma de vetores:

$\mathbf{R_1} = \mathbf{R_2} + \mathbf{R_3}$, ou, $\mathbf{R_2} + \mathbf{R_3} - \mathbf{R_1} = \mathbf{0}$

Em notação complexa,

$r_2 e i^{\theta 2} + r_3 e i^{\theta 3} - r_1 e i^{\theta 3} = 0$

Aplicando as séries de MacLaurin

$r_2(\cos\theta_2 + i\,\text{sen}\theta_2) + r_3(\cos\theta_3 + i\,\text{sen}\theta_3) - r_1(\cos\theta_1 + i\,\text{sen}\theta_1) = 0$

Separando as partes real e imaginária,

$r_2\cos\theta_2 + r_3\cos\theta_3 - r_1\cos\theta_1 = 0$

$r_2\text{sen}\theta_2 + r_3\text{sen}\theta_3 - r_1\text{sen}\theta_1 = 0$

Dado que $\theta_1 = 0$, $\cos\theta_1 = 1$ e $\text{sen}\theta_1 = 0$, reescrevemos:

$r_2\cos\theta_2 + r_3\cos\theta_3 - r_1 = 0$ ....eq. 4.4

$r_2\text{sen}\theta_2 + r_3\text{sen}\theta_3 = 0$

Isolando θ_3 e inserindo na equação acima com r_1 isolado, temos:

$\text{sen}\theta_3 = -\dfrac{r_2}{r_3}\text{sen}\theta_2$, onde $\theta_3 = \text{arcsen}\left(-\dfrac{r_2\text{sen}\theta_2}{r_3}\right)$ ....eq. 4.5

podemos escrever θ_3 através da equação fundamental da trigonometria

$\cos^2\theta_3 = 1 - sen^2\theta_3,$

$\cos\theta_3 = \sqrt{1 - sen^2\theta_3}$, inserindo $sen\theta_3$ da equação 4.5 acima dentro da raiz, teremos

$\cos\theta_3 = \sqrt{1 - \frac{r_2^2}{r_3^2} sen^2\theta_2}$ ....eq. 4.6

onde

$\theta_3 = \arccos \sqrt{1 - \frac{r_2^2}{r_3^3} sen^2\theta_2}$ ....eq. 4.7

Reescrevendo a eq. 4.4, isolando r_1, e inserindo a equação 4.7

$r_1 = r_2\cos\theta_2 + r_3\cos\theta_3$, fica:

$r_1 = r_2\cos\theta_2 + \sqrt{r_3^2 - r_2^2 sen\theta_2}$ ....eq. 4.8

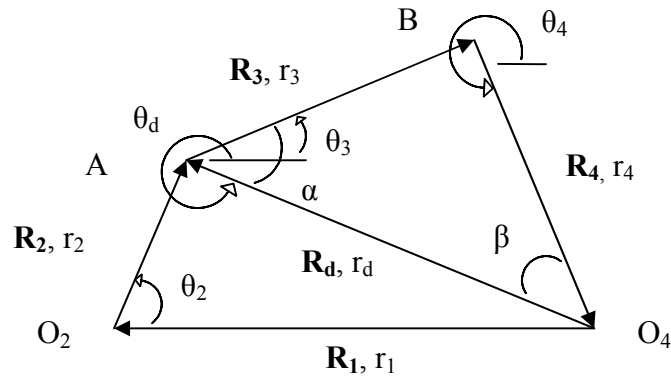
Como era de se esperar, a eq.4.3 é igual à eq. 4.8

4.3.2 Análise de Posição de um Mecanismo de Quatro Barras

4.3.2.1 Método da Notação Complexa

Nesta análise os comprimentos das barras r_1, r_2, r_3 e r_4 são conhecidos, e o problema consiste na determinação das posições angulares das barras 3 e 4, θ_3 e θ_4 respectivamente, sendo θ_2 conhecido.

Representando o mecanismo através de vetores posição formando uma cadeia cinemática fechada, e representando-a pela seguinte equação vetorial:

$\mathbf{R_1 + R_2 + R_3 + R_4 = 0}$

$\alpha = \theta_d - \theta_3$, $\beta = \theta_d - \theta_4$

Aplicando a lei dos cossenos para o triângulo O_2AO_4

$r_d^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2.r_1.r_2.\cos\theta_2$

O vetor auxiliar $\mathbf{R_d}$ pode ser escrito:

$\mathbf{R_d = R_1 + R_2}$

Na forma polar complexa:

$r_d e^{i\theta d} = r_1 e^{i\theta 1} + r_2 e^{i\theta 2}$

Aplicando as séries de MacLaurin e separando as partes real e imaginária,

$r_d\cos\theta_d = r_1\cos\theta_1 + r_2\cos\theta_2$

$r_d\text{sen}\theta_d = r_1\text{sen}\theta_1 + r_2\text{sen}\theta_2$

Dado que $\theta_1 = 180^0$, $\cos\theta_1 = -1$ e $\text{sen}\theta_1 = 0$, as duas equações acima ficam:

$r_d\cos\theta_d = -r_1 + r_2\cos\theta_2$

$r_d\text{sen}\theta_d = r_2\text{sen}\theta_2$

$$\theta_d = \text{arcsen}\left(\frac{r_2}{r_d} sen\theta_2\right)$$

Aplicando a lei dos cossenos para o triângulo ABO_4, e lembrando que $\alpha = \theta_d - \theta_3$

$r_4^2 = r_3^2 + r_d^2 - 2.r_3.r_d.\cos(\theta_d - \theta_3)$

Resolvendo em função de θ_3:

θ_3 = arcos $\dfrac{r_d^2 + r_3^2 - r_4^2}{2 r_d r_3}$ - θ_d

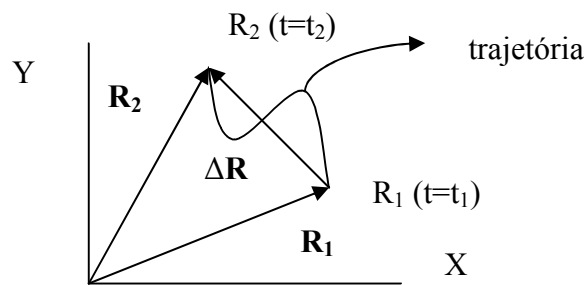
Aplicando novamente a lei dos cossenos para o triângulo ABO_4, e que $\beta = \theta_d - \theta_4$

$r_3^2 = r_4^2 + r_d^2 - 2.r_4.r_d.\cos(\theta_d - \theta_4)$.

Resolvendo em função de θ_4:

θ_4 = arcos $\dfrac{r_d^2 + r_4^2 - r_3^2}{2 r_d r_4}$ + θ_d

5. VELOCIDADES EM MECANISMOS ARTICULADOS

Considerando o movimento de uma partícula descrevendo uma trajetória qualquer, e localizando dois pontos R_1 e R_2 referentes aos instantes t_1 e t_2.

Durante o intervalo de tempo, $\Delta t = t_1 - t_2$, o deslocamento da partícula é dado pelo vetor deslocamento $\Delta \mathbf{R} = \mathbf{R_2} - \mathbf{R_1}$.

Define-se a sua velocidade média durante o intervalo de tempo Δt como sendo:

Vm = $\dfrac{\Delta R}{\Delta t}$

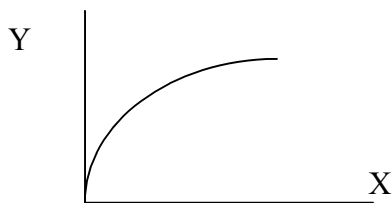
A velocidade instantânea, que é a velocidade da partícula em um determinado instante t, é chamada somente velocidade, dada por:

$$\mathbf{V} = \lim_{\Delta \vec{t} \to 0} \frac{\Delta R}{\Delta t} = \frac{\Delta R}{\Delta t} = \frac{dR}{dt} = \dot{R}$$

Como Δ**R** é um vetor, no limite haverá duas convergências: módulo e direção, portanto, a velocidade é a razão da variação do deslocamento em relação ao tempo.

Com o objetivo de definirmos as duas convergências, vamos recordar alguns elementos matemáticos:

5.1 Regra da Cadeia para Derivadas

Considerando uma partícula movendo-se em uma trajetória plana e curva:

Determina-se sua posição no instante t por meio de equações que expressam X e Y em função de t.

X = f(t),

Y = g(t)

Eliminando-se t, podemos escrever:

Y = F(X), mas X = f(t)

A regra da cadeia para derivadas nos dá:

Y = F(X): função diferenciável em x,

X = f(t) : função diferenciável em t

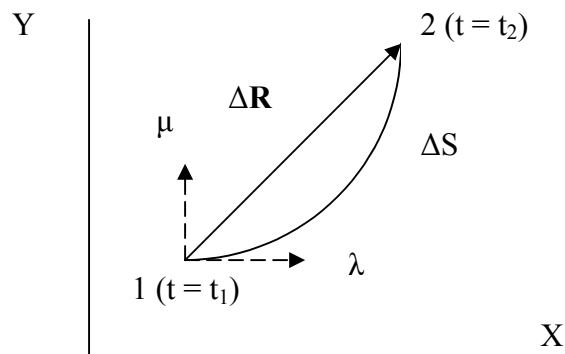
Podemos escrever: Y(t) = F[f(t)] = g(t) função diferenciável em t, portanto,

Y(t) = F'(x).f'(t), ou, $\frac{dY}{dt} = \frac{dY}{dX} \cdot \frac{dX}{dt}$

Retornando ao nosso estudo sobre velocidade e considerando uma partícula em movimento, deslocando-se da posição 1 ($t = t_1$) até a posição 2 ($t = t_2$), seguindo uma trajetória circular ΔS.

ΔR: vetor posição com origem no sistema λ e μ,

λ e μ: vetores unitários,

ΔS: trajetória, grandeza escalar.

De acordo com a figura, Δ**R** depende de ΔS, portanto, a velocidade depende da trajetória.

Como Δ**R** e ΔS são grandezas que dependem do tempo, então são grandezas em função do tempo. Chamando:

ΔS = f(t),

Δ**R** = g(t)

Eliminando-se t, podemos escrever:

Δ**R** = F(ΔS), mas ΔS = f(t)

Aplicando a regra da cadeia:

Δ**R** = F(ΔS): função diferenciável em ΔS,

ΔS = f(t): função diferenciável em t.

Podemos escrever: Δ**R** = F[f(t)] = g(t) função diferenciável em t, portanto,

$\Delta\mathbf{R}$(t) = F'(ΔS).f'(t), ou, $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta R}{\Delta t} = \frac{\Delta R}{\Delta S} \cdot \frac{\Delta S}{\Delta t}$, ou , $\frac{dR}{dt} = \frac{dR}{dS} \cdot \frac{dS}{dt}$, onde:

$\frac{dR}{dt}$ = **V** (vetor velocidade, módulo e direção)

$\frac{dR}{dS} = \lambda$ (somente direção, vetor tangente à trajetória)

$\frac{dS}{dt} = \dot{S}$ (velocidade da partícula na trajetória)

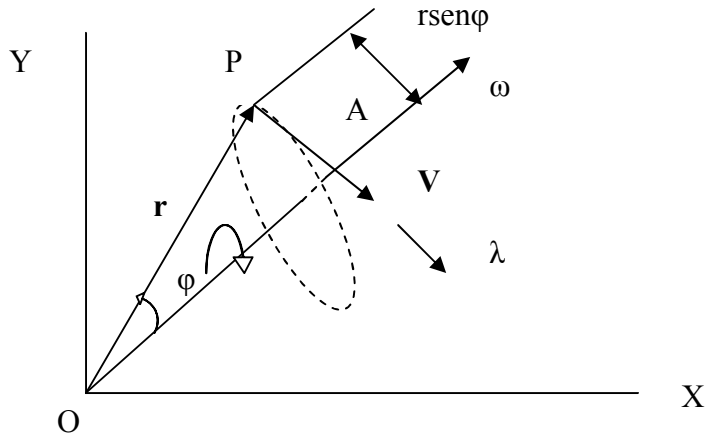
Podemos escrever a expressão:

$\mathbf{V} = \dot{S}\lambda$ ....eq. 5.1

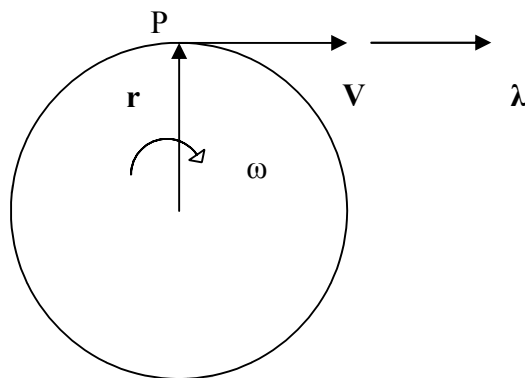
Em qualquer posição, a velocidade é sempre tangente à trajetória.

5.2 Velocidade Angular

Considerando um corpo rígido representado pelo disco girando em torno do eixo OA. Isto significa que todos os pontos do corpo, tal como o ponto P, se movem numa trajetória circular em torno do eixo OA. A velocidade angular do corpo é dada pelo vetor ω, que tem direção OA, e sentido dado pela regra da mão direita. A magnitude da velocidade angular é a razão de variação de qualquer segmento de reta do corpo, com direção normal ao eixo de rotação. Designando o deslocamento angular do segmento por Δθ no intervalo de tempo Δt, sua magnitude fica:

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta t} = \dot{\theta}$$

O vetor posição **r** expressa a posição do ponto P em relação a origem do sistema de coordenadas O, e o corpo gira com velocidade angular ω. O produto entre os dois vetores nos dá um terceiro vetor perpendicular ao plano formado por eles tal que:

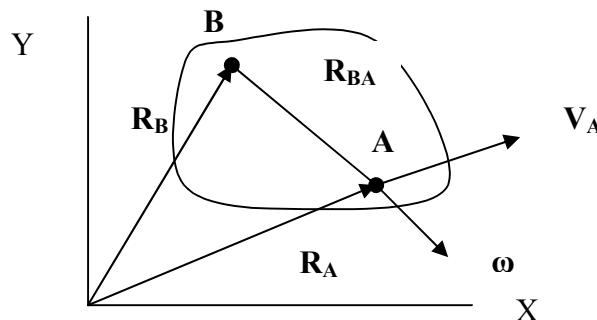
V = r.ωsenφ **λ,** onde λ é um vetor unitário perpendicular ao plano formado por **r** e **ω.**

Representando a origem do sistema de coordenadas "O" no corpo, o ângulo φ torna-se 90^0, e o vetor **r** torna-se o raio do circulo sendo que o ponto P desloca-se na trajetória circular. A figura acima fica representada abaixo:

Como sen $90^0 = 1$, a expressão de velocidade fica:
V = ω.r **λ** ou simplesmente V = ω.r

A velocidade de um ponto qualquer em um corpo rígido com velocidade de rotação, é igual ao produto da velocidade angular pela distância entre esse ponto e o eixo de

rotação, com direção tangente ao círculo de rotação do ponto. Sintetizando, o vetor velocidade é sempre tangente à trajetória

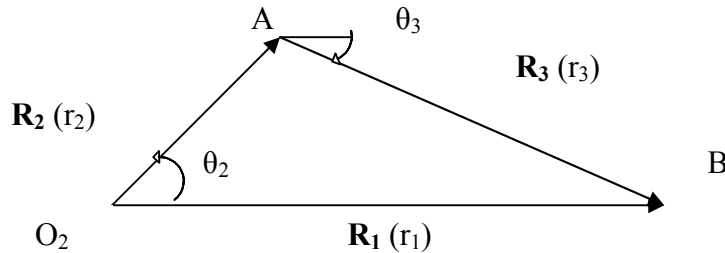
5.3 Equação de Velocidade Relativa

Considerando um corpo rígido que apresenta movimentos de translação e rotação, girando com velocidade angular ω em torno de um eixo que passa pelo ponto A, e destacando um ponto B localizado por R_{BA} em relação ao ponto A.

ω = velocidade angular do corpo,
V_A = velocidade de translação do corpo.
A posição de B é dada pela equação: **RB = RA + RBA**
A velocidade de B é dada pela equação: $\frac{dRB}{dt} = \frac{dRA}{dt} + \frac{dRBA}{dt}$, ou,
VB = VA + VBA denominada equação de velocidade relativa.
VBA = **ω** x **RBA** pois **RBA** é um vetor fixo ao corpo.

A equação de velocidade relativa expressa que a velocidade de um ponto qualquer do corpo rígido (B) é igual à soma da velocidade de A, componente de translação do movimento, mais a velocidade de B em relação a A, componente de rotação do movimento.

5.4 Métodos para a Determinação de Velocidades em Mecanismos

5.4.1 Método da Notação Complexa – Mecanismo Biela-Manivela

Considerando o mecanismo biela–manivela já visto no estudo sobre posição, item 4, queremos agora determinar a velocidade angular da barra 3 (ω_3), e a velocidade do ponto B, **VB.**

Da figura podemos escrever a soma de vetores:

R$_1$ = R$_2$ + R$_3$, ou, **R$_2$ + R$_3$ – R$_1$ = 0**

Em notação complexa,

$r_2ei^{\theta 2} + r_3ei^{\theta 3} - r_1ei^{\theta 3} = 0$

Derivando esta equação em relação ao tempo obtemos a expressão da velocidade da corrediça (B),

Lembrando que $\frac{d}{dx}e^u = e^u\frac{du}{dx}$, a expressão para a velocidade fica:

$$\frac{dr_2}{dt}e^{i\theta 2} + r_2 i\frac{d\theta_2}{dt}e^{i\theta 2} + \frac{dr_3}{dt}e^{i\theta 3} + r_3 i\frac{d\theta_3}{dt}e^{i\theta 3} - \frac{dr_1}{dt}e^{i\theta 1} - r_1 i\frac{d\theta_1}{dt}e^{i\theta 1} = 0 \text{ .... eq. 5.2}$$

Dado que os comprimentos r_2 e r_3 das barras 2 e 3 são constantes assim como o ângulo θ_1 da corrediça suas respectivas derivadas são nulas, além disso, da expressão acima teremos:

$$\frac{d\theta_2}{dt} = \omega_2$$

$$\frac{d\theta_3}{dt} = \omega_3$$

$$\frac{dr_1}{dt} = v_1$$

A **eq. 5.2** pode ser simplificada e reescrita:

$$ir_2\omega_2e^{i\theta 2} + ir_3\omega_3e^{i\theta 3} - v_1e^{i\theta 1} = 0$$

Lembrando a identidade de Euler: $e^{i\theta} = \cos\theta + i\text{sen}\theta$ e aplicando na expressão acima:

$$ir_2\omega_2(\cos\theta_2 + i\text{sen}\theta_2) + ir_3\omega_3(\cos\theta_3 + i\text{sen}\theta_3) - v_1(\cos\theta_1 + i\text{sen}\theta_1) = 0$$

Nesta equação acima ω_3 e v_1 são incógnitas, $\theta_1 = 90$ (na análise do deslocamento $\theta_1 = 0$) e dado que θ_2 é sempre conhecido. Separando as partes real e imaginária, e resolvendo em função das incógnitas:

$r_2\omega_2\cos\theta_2 + r_3\omega_3\cos\theta_3 - v_1\cos\theta_1 = 0$ ....eq. 5.3

$r_2\omega_2\text{sen}\theta_2 + r_3\omega_3\text{sen}\theta_3 - v_1\text{sen}\theta_1 = 0$ ....eq. 5.4

Isolando ω_3 da expressão (5.3):

$\omega_3 = -\dfrac{r_2\omega_2\cos\theta_2}{r_3\cos\theta_3}$ ....eq. 5.5

Como já visto em análise de posição no item 4, o ângulo θ_3 é dado pela expressão abaixo:

$$\theta_3 = \text{arcsen}\left(-\frac{r_2 sen\theta_2}{r_3}\right)$$

Isolando v_1 na expressão (5.4) e inserindo ω_3 da expressão (5.5), chega-se na expressão de velocidade:

$$v_1 = r_2\omega_2\text{sen}\theta_2 + r_3\omega_3\text{sen}\theta_3$$

$$v_1 = r_2\omega_2\text{sen}\theta_2 + r_3\left(-\frac{r_2\omega_2\cos\theta_2}{r_3\cos\theta_3}\right)\text{sen}\theta_3$$

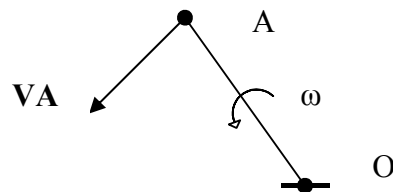
A expressão acima fica:

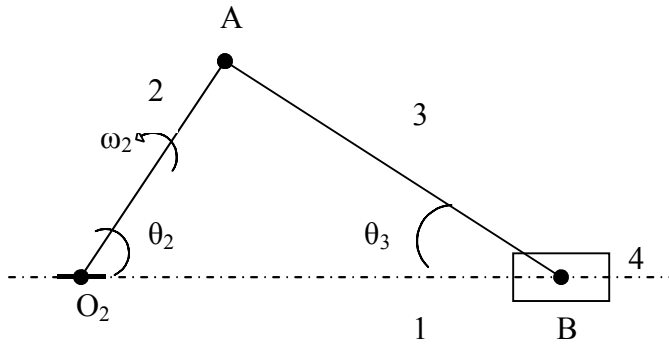
$\mathbf{v_1 = r_2\omega_2[sen\theta_2 - cos\theta_2.tg\theta_3]}$, lembrando que v_1 = **VB**

5.4.2 Método do Polígono de Velocidades – Mecanismo Biela-Manivela

O método baseia-se na construção e resolução gráfica de equações vetoriais, isto é, o método constitui-se em uma soma de vetores velocidades instantâneas que estão ocorrendo na condição do mecanismo.

Devemos nos lembrar que o vetor velocidade de um ponto qualquer contido na barra tem direção tangente à sua trajetória e, por consequência, este vetor será perpendicular à barra em questão, exemplo:

Considere a barra descrevendo movimento de rotação, articulada em O, portanto girando em torno de O com velocidade angular ω, e queremos expressar o vetor velocidade instantânea do ponto A em relação a articulação O.

A direção de **VA** será perpendicular à barra, sentido para baixo devido ao sentido da velocidade angular ω ser anti-horária, e sua magnitude dada pela expressão VA = ω.AO

Considerando o mecanismo articulado biela-manivela. Queremos determinar a velocidade da corrediça B assim como a velocidade angular da barra 3 (biela) ω_3.

Na determinação das velocidades parte-se sempre de uma velocidade conhecida que é a da barra 2 – manivela, pois sua velocidade angular também é conhecida dado que é a barra motriz girando com velocidade n, de onde obtemos a expressão:

$\omega = 2\pi \frac{n}{60}$, onde n = rpm

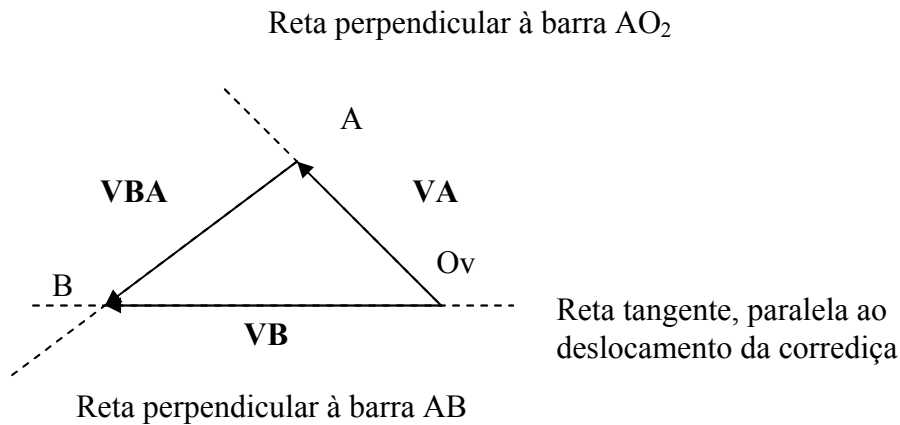
A obtenção das velocidades pelo método dos polígonos resulta da soma de vetores obtidos da equação de velocidade relativa onde:

VB = VA + VBA

A magnitude do vetor velocidade VA é encontrado: VA = $\omega_2 AO_2$. Conhecida sua magnitude a direção também é conhecida pois o ponto A descreve uma trajetória circular e, por conseqüência, a direção é perpendicular à barra AO_2, e o sentido do vetor VA acompanha o sentido da velocidade angular ω_2.
A origem do vetor **VA** define o pólo de velocidades (O_v), o qual é a origem também do vetor resultante **VB**. Dado que o ponto B está localizado na corrediça e esta desloca-se em translação, traçamos uma reta na horizontal a partir de O_v.

No mecanismo, a barra AB (3) tem como extremidades os pontos A e B. Esta barra descreve movimentos de translação e rotação, portanto, sua velocidade tangencial também será perpendicular.

Para determinarmos a velocidade VBA traçamos uma reta perpendicular à barra AB, reta essa que passa pelo ponto A e, ao traçarmos essa reta haverá o cruzamento com a reta horizontal onde se localiza o vetor **VB**. O cruzamento define o ponto B comum aos vetores **VB e VBA.**

Na construção do polígono de velocidades, a velocidade de uma corrediça, cursor ou pistão, peça que descreve movimento de translação somente, sempre tem como origem o pólo. O polígono de velocidades fica representado na figura abaixo:

Uma vez determinado VBA, a determinação da velocidade angular ω_3 é trivial, dado por:

$$\omega_3 = \frac{VBA}{BA}$$

5.4.3 Método dos Centros Instantâneos de Rotação – Mecanismo Biela-Manivela

No método chamado linha de centros admite-se a velocidade VA conhecida, e pretende-se determinar as velocidades de outros pontos do mecanismo biela-manivela, quatro barras e/ou outros. O primeiro passo consiste em achar todos os pólos, e um mecanismo tem tantos pólos quantos forem as formas de união entre as peças. O número de pólos de um mecanismo de *n* peças é:

$$N = \frac{n(n-1)}{2} \qquad \text{.........eq.5.6}$$

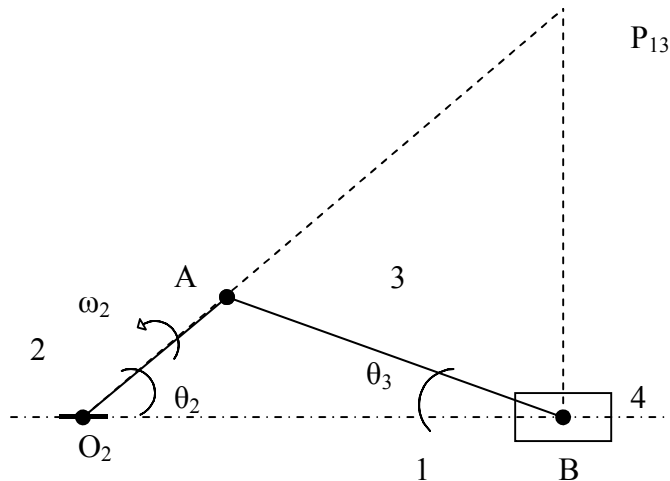
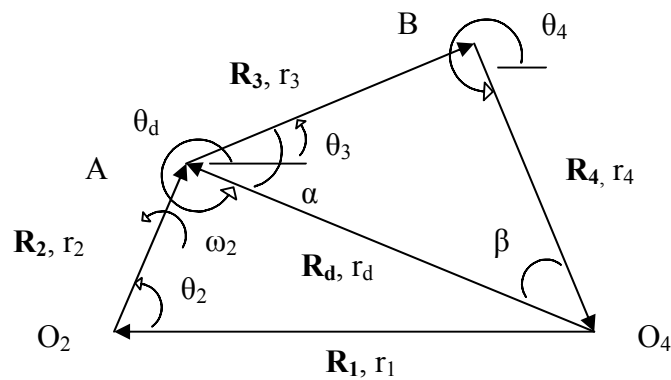
O pólo de velocidade é definido como a *localização instantânea de um ponto comum a dois corpos que têm a mesma velocidade em cada*, ou seja, a *localização instantânea de um ponto em um corpo, em torno do qual outro corpo é instantaneamente girado.*

Após achados esses pólos, os restantes são localizados pelo teorema de **Aronhold-Kennedy**:
Quando três corpos se movem com movimento relativo entre si, eles têm três pólos de velocidade, estando todos na mesma linha reta.

Análise considerando o mecanismo biela-manivela.

O pólo A pertence à manivela – peça 2, e o pólo B pertence à corrediça – peça 4. Essas peças 2 e 4 têm em comum o polo P_{13}, e apresentam a mesma velocidade quer se considere fazendo parte de uma ou outra peça.

O pólo P_{13} é o ponto de intersecção entre o prolongamento da reta coincidente com a barra 2 e com a peça 4, sendo chamado centro instantâneo dos pontos A e B. Analisando a peça 2, manivela, todos os pontos que a ela pertence giram em torno de O_2, assim, podemos escrever:

$$\omega_3 = \frac{VA}{AP_{13}} = \frac{VB}{BP_{13}}$$

5.4.4 Método da Notação Complexa – Mecanismo de Quatro Barras

Utilizando a notação complexa, a equação que representa a cadeia cinemática formada pelos vetores $\mathbf{R_1}$, $\mathbf{R_2}$, $\mathbf{R_3}$ e $\mathbf{R_4}$ é dada por:

$$r_1e^{i\theta 1} + r_2e^{i\theta 2} + r_3e^{i\theta 3} + r_4e^{i\theta 4} = 0$$

Os termos r_1, r_2, r_3, r_4 e θ_1 não variam no tempo, derivando a expressão acima em relação ao tempo,

$$r_2 i\frac{d\theta_2}{dt}e^{i\theta 2} + r_3 i\frac{d\theta_3}{dt}e^{i\theta 3} + r_4 i\frac{d\theta_4}{dt}e^{i\theta 4} = 0 \quad \text{...eq.5.7}$$

Sendo que,

$$\frac{d\theta_2}{dt} = \omega_2$$

$$\frac{d\theta_3}{dt} = \omega_3$$

$$\frac{d\theta_3}{dt} = \omega_4$$

A equação (e) acima fica reescrita:

$r_2 i\omega_2 e^{i\theta 2} + r_3 i\omega_3 e^{i\theta 3} + r_4 i\omega_4 e^{i\theta 4} = 0$, aplicando Euler ($e^{i\theta}$ =cos θ - isenθ) obtemos:

$r_2 i\omega_2(\cos\theta_2 - i\text{sen}\theta_2) + r_3 i\omega_3(\cos\theta_3 - i\text{sen}\theta_3) + r_4 i\omega_4(\cos\theta_4 - i\text{sen}\theta_4) = 0$

Separando as partes real e imaginária:

$- r_2\omega_2\text{sen}\theta_2 – r_3\omega_3\text{sen}\theta_3 – r_4\omega_4\text{sen}\theta_4 = 0$
$r_2\omega_2\cos\theta_2 + r_3\omega_3\cos\theta_3 + r_4\omega_4\cos\theta_4 = 0$

Essas equações acima constituem-se em equações lineares homogêneas com duas incógnitas, ω_3 e ω_4, e a sua resolução pode ser obtida pela Regra de Cramer. Essa regra é um método para a resolução de um sistema de equações, e se baseia no uso de determinantes cuja solução é dada por: $X_i = \frac{Dx_i}{D}$ onde D é o determinante da matriz dos coeficientes, formada pelos coeficientes das incógnitas do sistema, e Dx_i é o determinante obtido pela substituição, na matriz incompleta, da coluna i pela coluna formada pelos termos independentes.

Resolvendo para a incógnita ω_3, obtemos:

$$\omega_3 = \frac{\begin{vmatrix} -r_2\omega_2 sen\theta_2 & -r_4 sen\theta_4 \\ r_2\omega_2 cos\theta_2 & r_4 cos\theta_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -r_3 sen\theta_3 & -r_4 sen\theta_4 \\ r_3 cos\theta_3 & r_4 cos\theta_4 \end{vmatrix}}$$

Resolvendo os determinantes,

$$\omega_3 = \frac{-r_2 r_4 \omega_2 sen\theta_2 \cos\theta_4 + r_2 r_4 \omega_2 \cos\theta_2 sen\theta_4}{-r_3 r_4 sen\theta_3 \cos\theta_4 + r_3 r_4 sen\theta_4 \cos\theta_3}$$

Lembrando que sen(a+b) = senacosb – cosasenb, ω_3 fica:

$$\omega_3 = \frac{-r_2 r_4 \omega_2 sen(\theta_2 - \theta_4)}{-r_3 r_4 sen(\theta_4 - \theta_3)}$$

Para a determinação da velocidade angular ω_4 o procedimento se repete, e a expressão fica:

$$\omega_4 = \frac{r_2 \omega_2 sen(\theta_2 - \theta_3)}{r_4 sen(\theta_4 - \theta_3)}$$

Os ângulos θ_3, θ_4, θ_d e a grandeza r_d foram obtidos na análise de posição.

$$\theta_3 = \arccos \frac{r_d^2 + r_3^2 - r_4^2}{2 r_d r_3} - \theta_d$$

$$\theta_4 = \arccos \frac{r_d^2 + r_4^2 - r_3^2}{2 r_d r_4} + \theta_d$$

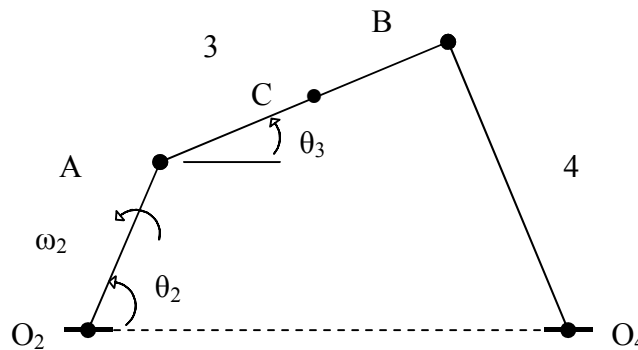
$$\theta_d = \text{arcsen}\left(\frac{r_2}{r_d} sen\theta_2\right)$$

$$r_d^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2.r_1.r_2.\cos\theta_2$$

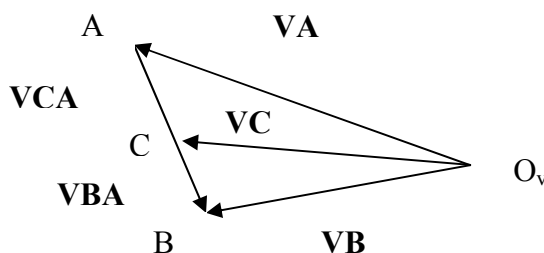
5.4.5 Método do Polígono de Velocidades – Mecanismo de Quatro Barras

Considere o mecanismo de quatro barras onde a barra 2, manivela, gira com velocidade angular ω_2 conhecida. A barra 2 ao completar um ciclo permite à conecção A descrever uma trajetória circular e, a magnitude da velocidade do ponto A em relação à articulação O_2 é dada pela expressão:

$VA = \omega_2 \, AO_2$

O vetor velocidade **VA** é totalmente definido em sua magnitude, direção – sua direção tangencia a trajetória do ponto A, portanto, é perpendicular à barra AO_2, e sentido – o sentido do vetor velocidade acompanha o sentido do vetor velocidade angular.

Para se determinar a velocidade da articulação B e as velocidades angulares das barras 3 e 4 , ω_3 e ω_4 respectivamente, utilizamos a soma de vetores velocidade estabelecida na equação de velocidade relativa,

VB = VA + VBA

O vetor velocidade **VB** expressa a velocidade da articulação B em relação à articulação fixa O_4, e sua direção é perpendicular à barra BO_4, de mesma forma, a velocidade **VBA**, está relacionada com a barra BA sendo perpendicular a essa barra 4. O polígono de velocidades fica:

Na construção do polígono é importante atentar que as velocidades de pontos relacionados às barras que estão ligadas em articulações fixas como O_2 e O_4 têm o pólo O_v como origem comum. A velocidade relacionada à barra 3, a qual está articulada aos pontos A e B, é expressa pelo vetor **VBA** o qual é perpendicular à barra 3, e cuja origem coincide com o ponto A definido na extremidade do vetor **VA,** e o ponto B será encontrado no cruzamento com a reta (direção) onde está localizado o vetor **VB.**

As velocidades angulares são determinadas fazendo:

$VBA = \omega_3.BA \therefore \omega_3 = \frac{VBA}{BA}$

$VB = \omega_4.BO_4 \therefore \omega_4 = \frac{VB}{BO_4}$

A determinação da velocidade de um ponto C localizado na barra 3, é realizada através da equação de velocidade relativa para o ponto C, efetuando a seguinte soma vetorial:

VC = VA + VCA

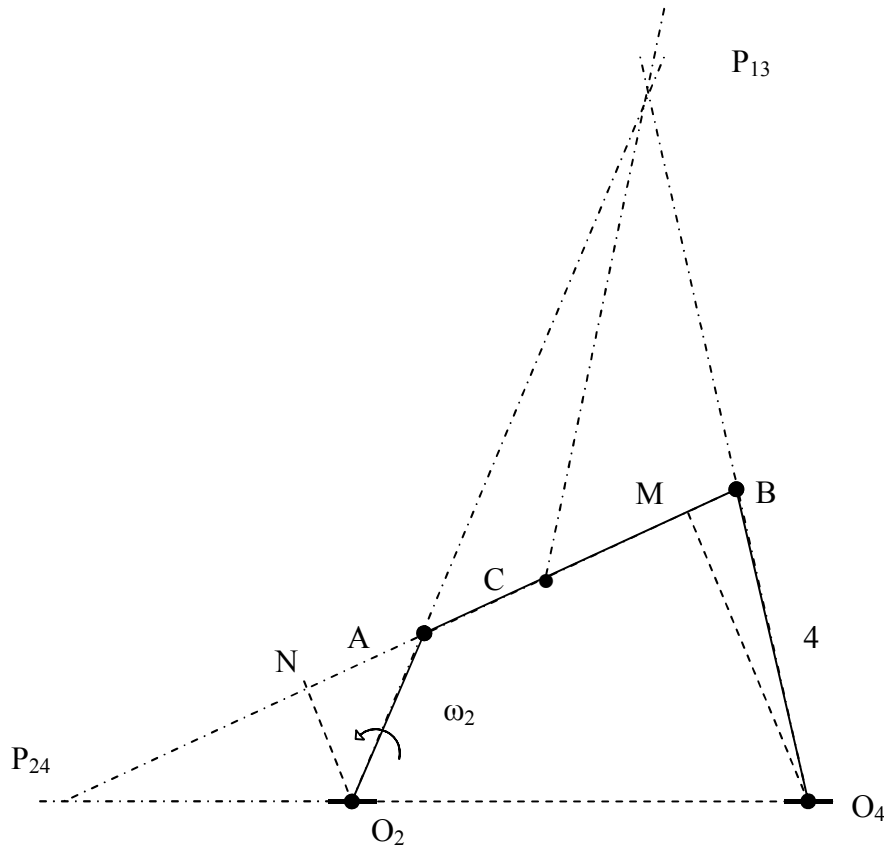
VCA é a velocidade do ponto C em relação ao ponto A. Como o ponto C está localizado na barra 3, a velocidade fica:

$VCA = \omega_3.CA$

Uma vez determinada a grandeza de VCA, localiza-se a posição do ponto C no polígono de velocidades, e o vetor VC é expresso do pólo até o ponto C, realizando a equação acima.

5.4.6 Método dos Centros Instantâneos de Rotação – Mecanismo de Quatro Barras

O procedimento para a determinação das velocidades pelo método dos centros instantâneos de rotação segue os mesmos parâmetros já definidos no mecanismo biela manivela, porém, determinamos 2 centros denominados P_{13} e P_{24} relacionados com as

peças 1,3 e 2,4 respectivamente. O comprimento das peças ou barras são conhecidos assim como a velocidade angular da barra 2, ω_2.

A velocidade angular da barra 2 é conhecida: $VA = \omega_2.AO_2$

Pela semelhança de triângulos podemos escrever: $P_{24}\ O_2\ N \equiv P_{24}\ O_4\ M$

O centro P_{24} é obtido pelo cruzamento do prolongamento das linhas 1 e 3 respectivamente,

A centro P_{13} é obtido pelo cruzamento do prolongamento das linhas 2 e 4 respectivamente.

As retas tracejadas NO_2 e MO_4 são perpendiculares à linha BP_{24}, a qual é paralela à barra AB ou barra 3.

Em qualquer mecanismo de quatro barras, é válido o chamado teorema da razão de velocidades angulares postulado como:

"A razão de velocidades angulares entre dois elementos, relativamente a um terceiro, é inversamente proporcional ao comprimento dos segmentos formados na linha de centros pela intersecção do centro instantâneo de rotação"

Determinação de ω_4

Do mecanismo acima podemos escrever:

$$\frac{\omega_4}{\omega_2} = \frac{O_2P_{24}}{O_4P_{24}}$$

Utilizando as relações angulares acima, escrevemos:

$\omega_4 .\ O_4P_{24} = \omega_2 . O_2P_{24}$, isolando ω_4,

$$\omega_4 = \frac{\omega_2 O_2 P_{24}}{O_4 P_{24}}$$

As expressões de velocidade A e B contidos no mecanismo podem ser escritas devido as relações trigonométricas:

VA'= $\omega_2 .NO_2$,

VB'= $\omega_4 .MO_4$, onde

VA'= VB' por conseqüência,

$\omega_2 .NO_2 = \omega_4 .MO_4$, isolando ω_4,

$$\omega_4 = \frac{\omega_2 NO_2}{MO_4}$$

Uma vez determinado ω_4 determinamos VB pois

VB = $\omega_4\ BO_4$

Determinação de ω_3

As velocidades VA e VB podem ser encontradas fazendo;

VA = $\omega_3 .AP_{13}$,

VB = $\omega_3 .BP_{13}$

Portanto ω_3 pode ser obtido:

$$\omega_3 = \frac{VA}{AP_{13}} = \frac{VB}{BP_{13}}$$

Determinação de VC

A velocidade em qualquer ponto ao longo da barra 3 pode ser obtida tomada em relação ao centro P_{13}

$VC = \omega_3 . CP_{13}$

6. ACELERAÇÃO EM MECANISMOS ARTICULADOS

A aceleração mede a rapidez com que um corpo varia sua velocidade. Acelerar ou desacelerar um corpo significa variar sua velocidade em um intervalo de tempo e, em um corpo acelerado, o vetor aceleração tem a mesma direção e sentido do vetor

velocidade, enquanto que um corpo que sofre desaceleração, o vetor aceleração possui mesma direção do vetor velocidade, porém, os sentidos são opostos.

A aceleração média pode ser definida como sendo a razão da variação da velocidade em um intervalo de tempo, e quando o intervalo de tempo tende a zero a aceleração denomina-se aceleração instantânea. A aceleração instantânea, também chamada simplesmente de aceleração, é definida pela equação:

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \dot{v} = \ddot{r}$$

Δv = é o incremento de v durante o intervalo de tempo Δt. Analogamente, a aceleração angular de um corpo que gira é definida pela equação

$$\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega} = \ddot{\theta}$$

Retornando ao equacionamento visto na seção anterior, da equação 4.1 temos

$V = \dot{S}\lambda$

Onde $\dot{S}$ é a velocidade do ponto P ao longo da trajetória, e o vetor unitário λ tangente à mesma trajetória.

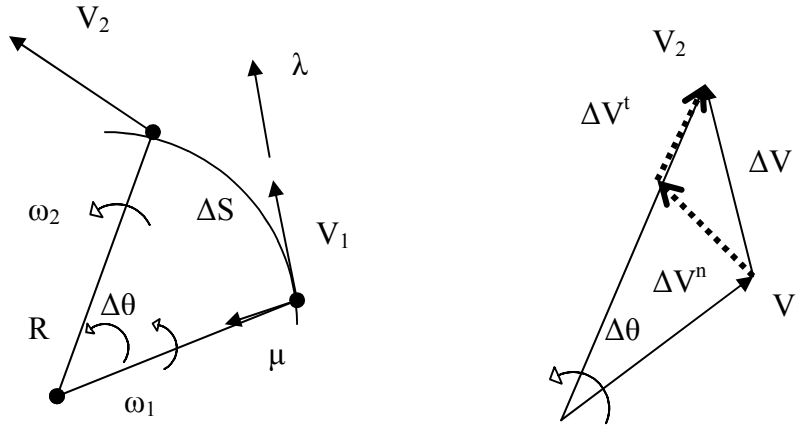
Derivando duas vezes em relação ao tempo a expressão de velocidade tangencial acima, teremos:

$A = \ddot{S}\lambda + \dot{S}\dot{\lambda}$

A expressão acima nos indica que na aceleração aparecem duas componentes:

Aceleração tangencial: $a^t = \ddot{S}\lambda$, pois λ é tangente à trajetória,

Aceleração normal ou radial: $a^n = \dot{S}\dot{\lambda}$, pois $\dot{\lambda}$ é um vetor unitário defasado 90^0 de λ

Considere um corpo deslocando-se da posição 1 para a posição 2 acelerado positivamente tal que $V_2 \rangle$ V1

$\Delta V = \Delta V^n + \Delta V^t$

Como $V_2 \rangle V_1$, e o corpo descreve uma trajetória circular portanto R permanece constante, significa que $\omega_2 \rangle \omega_1$ numa taxa de variação do vetor velocidade onde

$V_1 = \omega_1.R$

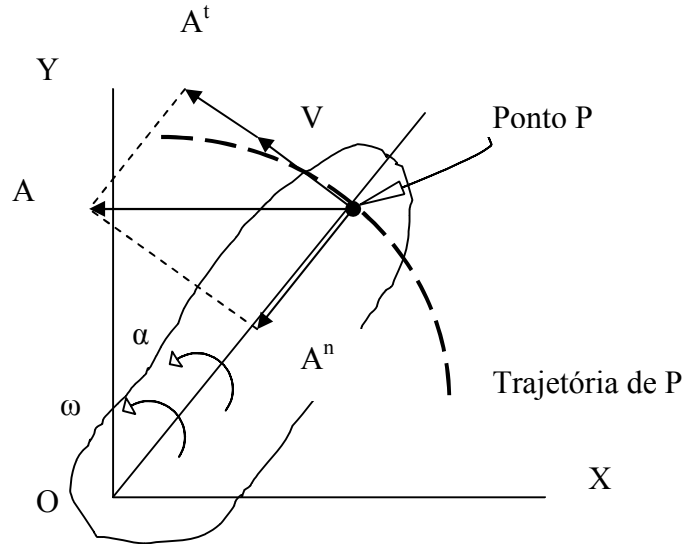
$V_2 = \omega_2.R$

Da segunda figura podemos escrever

$$\Delta V^n = V.\Delta\theta, \quad \frac{\Delta V^n}{\Delta t} = V\frac{\Delta\theta}{\Delta t}, \quad \frac{dV^n}{dt} = V\frac{d\theta}{dt} \quad \therefore a^n = V\omega$$

$$\Delta V^t = R(\omega_2 - \omega_1) = R\Delta\omega, \quad \frac{\Delta V^t}{\Delta t} = R\frac{\Delta\omega}{\Delta t}, \quad \frac{dV^t}{dt} = R\frac{d\omega}{dt} \quad \therefore a^t = R\alpha$$

6.1 Equação de Aceleração Relativa

Considere um corpo girando acelerado em torno de uma articulação O, destacando um ponto P neste corpo, e chamando de R a distância do ponto P até o centro de curvatura O. Os vetores aceleração podem ser representados:

O componente tangencial da aceleração, A^t, mede a taxa de variação da velocidade escalar, portanto, é tangente à trajetória. Se o ponto P movimenta-se com velocidade constante $A^t = 0$, e a aceleração do ponto reduz-se a seu componente normal.

O componente normal da aceleração, A^n, é sempre dirigida ao centro de rotação definindo a aceleração centrípeta. Esses dois componentes são perpendiculares entre si: $A^n \perp A^t$

Tal como visto no item **4.3**, a equação de velocidade relativa, que é derivada da equação do deslocamento relativo, é dada pela expressão

VB = VA + VBA

Consequentemente, a equação de aceleração relativa é expressa na forma:

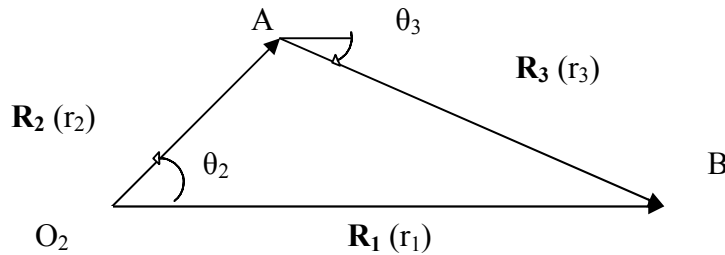
AB = AA + ABA, em notação minúscula, **aB = aA + aBA**

a qual pode ser desmembrada em

$$\mathbf{aB^n + aB^t = aA^n + aA^t + aBA^n + aBA^t}$$

6.2 Métodos para a Determinação de Acelerações em Mecanismos

6.2.1 Método da Notação Complexa – Mecanismo Biela-Manivela

Considerando o mecanismo biela–manivela já visto no estudo sobre posição, item 3, e velocidade, item 4, queremos agora determinar a aceleração angular da barra 3 (α_3), e a aceleração do ponto B, **aB.** Torna-se relevante dizer que as expressões que definem a posição e velocidade já foram trabalhadas e determinadas anteriormente. Repetindo-as:

Da figura podemos escrever a soma de vetores:

$R_1 = R_2 + R_3$, ou, **$R_2 + R_3 - R_1 = 0$**

Em notação complexa,

$r_2ei^{\theta 2} + r_3ei^{\theta 3} - r_1ei^{\theta 3} = 0$

Atentando ao fato de que r_2, r_3 e θ_1 são constantes, e derivando em relação ao tempo encontramos a expressão para a velocidade

$ir_2\omega_2e^{i\theta 2} + ir_3\omega_3e^{i\theta 3} - v_1e^{i\theta 1} = 0$

Derivando em relação ao tempo encontramos a expressão para a aceleração

$$ir_2\left(\frac{d\omega_2}{dt}e^{i\theta 2} + \omega_2 i\frac{d\theta_2}{dt}e^{i\theta 2}\right) + ir_3\left(\frac{d\omega_3}{dt}e^{i\theta 3} + \omega_3 i\frac{d\theta_3}{dt}e^{i\theta 3}\right) - \frac{dv_1}{dt}e^{i\theta 1} = 0 \quad \text{...........eq.6.1}$$

sendo que

$$\frac{d\omega_2}{dt} = 0$$

$$\frac{d\omega_3}{dt} = \alpha_3$$

$$\frac{dv_1}{dt} = a_1 = aB$$

Substituindo esses termos na equação 6.1, esta pode ser simplificada

$i^2 r_2 \omega_2^2 e^{i\theta 2} + i r_3 \alpha_3 e^{i\theta 3} + i^2 r_3 \omega_3^2 e^{i\theta 3} - a_1 e^{i\theta 1} = 0$ eq.6.2

Nesta equação 6.2 há duas incógnitas α_3 e a_1. Utilizando a fórmula de Euler, separando as partes real e imaginária, e resolvendo o sistema obtemos:

$$\alpha_3 = \frac{r_2 \omega_2^2 sen\theta_2 + r_3 \omega_3^2 sen\theta_3}{r_3 \cos\theta_3}$$ eq.6.2

α_3: aceleração angular da biela, barra 3.

Uma vez determinado α_3, encontramos a_1 ou aB

$a_1 = aB = - \omega_2^2 r_2(\cos\theta_2 + sen\theta_2 . tg\theta_3) - \omega_3^2 r_3(\cos\theta_3 + sen\theta_3 . tg\theta_3)$

a_1 = aB: aceleração linear da corrediça

As expressões da posição e velocidade angular da biela, θ_3 e ω_3 respectivamente, já foram obtidos nos itens 3 e 4:

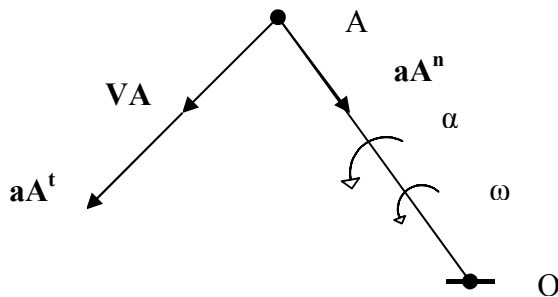
$$\theta_3 = \text{arcsen}\left(-\frac{r_2 sen\theta_2}{r_3}\right)$$

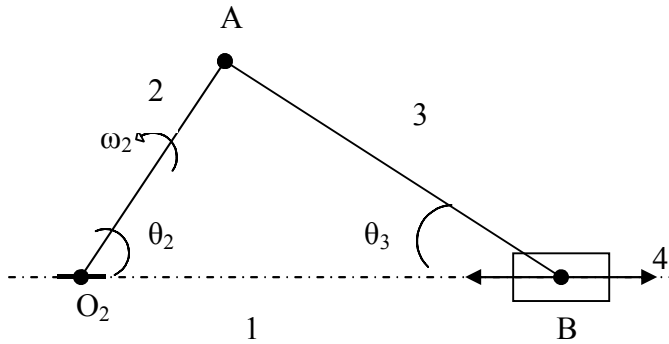
$$\omega_3 = -\frac{r_2 \omega_2 \cos\theta_2}{r_3 \cos\theta_3}$$

6.2.2. Método do Polígono de Acelerações – Mecanismo Biela – Manivela

O método baseia-se na construção e resolução gráfica de equações vetoriais, isto é, o método constitui-se em uma soma de vetores acelerações instantâneas que estão ocorrendo na condição do mecanismo.

Devemos nos lembrar que o vetor aceleração de um ponto qualquer contido na barra tem duas componentes sendo que uma, a aceleração normal, é paralela à barra e cujo vetor aponta ao sentido do centro de rotação enquanto que a outra componente, aceleração tangencial, tem direção tangente à trajetória do ponto e, por consequência, este vetor será perpendicular à barra em questão, exemplo:

Considere a barra descrevendo movimento de rotação, articulada em O, portanto girando em torno de O com velocidade angular ω e aceleração angular α, e queremos expressar o vetor aceleração instantânea do ponto A em relação a articulação O.

Considerando o mecanismo articulado biela-manivela. Queremos determinar a aceleração da corrediça B assim como a aceleração angular da barra 3 (biela) α_3.

Na determinação das acelerações parte-se sempre de uma aceleração conhecida que é a da barra 2 – manivela, pois sua velocidade angular também é conhecida dado que é a barra motriz girando com velocidade n.

A equação de aceleração relativa é da forma:

aB = aA + aBA eq.6.3

Analisando o movimento do mecanismo é possível perceber que a barra AO_2 (2) gira em torno do centro de rotação O_2, e que, na medida em que essa barra 2 descreve seu movimento de rotação, a articulação A descreve uma trajetória circular. Como a barra BA (3) está articulada em A, ela acompanha o movimento da barra 2, propiciando que a barra AB descreva movimentos de translação e rotação.

Uma vez que descreve movimento de rotação haverá um centro de rotação, e este centro é definido em A. Com relação a corrediça (B), o mecanismo impõe restrições ao seu movimento permitindo somente a translação em um dado sentido, no caso, horizontal. A translação da corrediça B ocorre devido a translação da barra AB.

Os vetores componentes aceleração podem ser desmembrados como se segue abaixo,

$\mathbf{aA = aA^n + aA^t}$

aA representa a aceleração da articulação A em relação ao centro de rotação O_2

$\mathbf{aBA = aBA^n + aBA^t}$

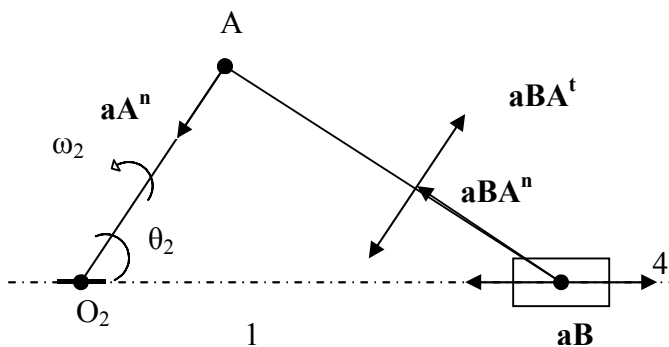
aBA representa a aceleração da articulação B em relação a articulação A

aB não possui componentes normal e tangencial devido a alguma rotação pois a corrediça B somente translada na horizontal.

Quando se pretende determinar as acelerações pelo método dos polígonos parte-se sempre de uma aceleração conhecida, a qual está relacionada à barra 2, manivela, pois essa é a peça motriz.

Normalmente estuda-se o movimento em regime permanente significando que a manivela gira com velocidade constante implicando em aceleração angular (α_2) igual a zero, porém, satisfazendo a segunda Lei de Newton (F = ma), haverá a aceleração centrípeta devido a velocidade de rotação ω da barra.

Quando se estuda a aceleração em mecanismos é necessário conhecer os termos de velocidade. Como as acelerações normais dependem das velocidades, isso significa que a direção e sentido dos vetores aceleração normal são conhecidos, porém, com relação aos vetores aceleração tangencial, somente a direção é conhecida, ou seja, é perpendicular à barra em questão, mas o sentido é desconhecido pois depende do sentido da aceleração angular a qual, obviamente, é desconhecida.

Representando os vetores no mecanismo biela-manivela, e considerando $\alpha_2 = 0$

A magnitude dos vetores componentes pode ser determinada:

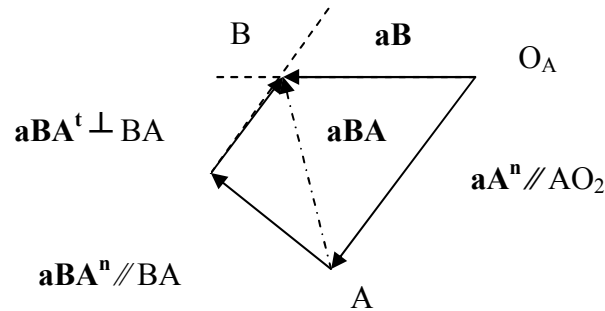
$aA^n = \omega_2.VA = \omega_2^2.AO_2$ (conhecido)

$aA^t = \alpha_2.AO_2$, supondo $\alpha_2 = 0$, $aA^t = 0$.

$aBA^n = \omega_3.VBA = \omega_3^2.BA$ (conhecido)

$aBA^t = \alpha_3.BA$ (desconhecido)

aB – translação somente (desconhecido)

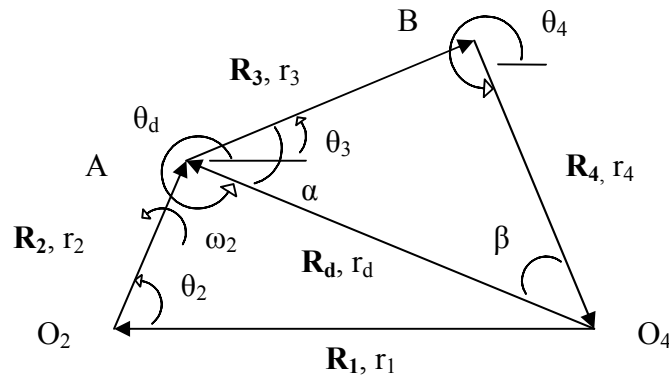
O polígono de acelerações pode ser construído obedecendo a equação 6.3

O ponto B é encontrado através do cruzamento entre a linha que contém o vetor aceleração tangencial de BA (**aBA^t),** e a linha que contém a aceleração de B (**aB)**. Tanto o vetor **aB** quanto o vetor **aA^n** o qual é o próprio vetor aceleração de A (**aA)** são chamados vetores aceleração absoluto pois exprimem a aceleração dos pontos relacionados, e têm como origem o pólo de aceleração (O_A).

O vetor **aBA** é chamado vetor aceleração relativo pois não tem o pólo como origem dado que a barra 3 (AB) não gira em torno da articulação fixa O_2.

Uma vez que o polígono de acelerações foi construído em escala usando as grandezas das acelerações conhecidas, a aceleração angular da barra 3 (AB) é determinada fazendo:

$$\alpha_3 = \frac{aBA^t}{BA}$$

O sentido de α_3 é dado pela regra da mão direita sendo que a origem do vetor **aBA^t** está localizada em B.

6.2.3 Método da Notação Complexa – Mecanismo de Quatro Barras

As expressões para a determinação das acelerações derivam das expressões de velocidade, portanto, para o melhor entendimento seqüencial na obtenção das expressões de aceleração, estamos repetindo as expressões de velocidades já encontrada no item 4.

Utilizando a notação complexa, a equação que representa a cadeia cinemática formada pelos vetores **R_1, R_2, R_3 e R_4** é dada por:

$$r_1e^{i\theta 1} + r_2e^{i\theta 2} + r_3e^{i\theta 3} + r_4e^{i\theta 4} = 0$$

Os termos r_1, r_2, r_3, r_4 e θ_1 não variam no tempo, derivando a expressão acima em relação ao tempo,

$$r_2 i\frac{d\theta_2}{dt}e^{i\theta 2} + r_3 i\frac{d\theta_3}{dt}e^{i\theta 3} + r_4 i\frac{d\theta_4}{dt}e^{i\theta 4} = 0 \quad \text{...eq.6.4}$$

Sendo que,

$$\frac{d\theta_2}{dt} = \omega_2$$

$$\frac{d\theta_3}{dt} = \omega_3$$

$$\frac{d\theta_4}{dt} = \omega_4$$

A equação 6.4 acima fica reescrita:

$$r_2 i\omega_2 e^{i\theta 2} + r_3 i\omega_3 e^{i\theta 3} + r_4 i\omega_4 e^{i\theta 4} = 0 \,, \quad \text{...eq. 6.6}$$

$$\omega_3 = \frac{r_2\omega_2 sen(\theta_2 - \theta_4)}{r_3 sen(\theta_4 - \theta_3)}$$

Para a determinação da velocidade angular ω_4 o procedimento se repete, e a expressão fica:

$$\omega_4 = \frac{r_2\omega_2 sen(\theta_2 - \theta_3)}{r_4 sen(\theta_4 - \theta_3)}$$

Os ângulos θ_3, θ_4, θ_d e a grandeza r_d foram obtidos na análise de posição.

$$\theta_3 = \arccos \frac{r_d^2 + r_3^2 - r_4^2}{2 r_d r_3} - \theta_d$$

$$\theta_4 = \arccos \frac{r_d^2 + r_4^2 - r_3^2}{2 r_d r_4} + \theta_d$$

$$\theta_d = \text{arcsen}\left(\frac{r_2}{r_d} sen\theta_2 \right)$$

$$r_d^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2.r_1.r_2.\cos\theta_2$$

Para a determinação das acelerações angulares é necessário derivar a expressão 6.6 acima sendo,

$$\frac{d\omega_2}{dt} = \alpha_2$$

$$\frac{d\omega_3}{dt} = \alpha_3$$

$$\frac{d\omega_4}{dt} = \alpha_4$$

A equação 6.6 acima fica reescrita:

$$r_2 i^2 \omega_2^2 e^{i\theta 2} + r_3 i\alpha_3 e^{i\theta 3} + r_3 i^2 \omega_3^2 e^{i\theta 3} + r_4 i\alpha_4 e^{i\theta 4} + r_4 i^2 \omega_4^2 e^{i\theta 4} = 0$$

Atendendo ao fato de que a manivela gira com velocidade angular constante, α_2 é zero, e o ângulo θ_2 é igual a $\omega_2 t$. Aplicando Euler os termos da expressão acima ficam:

$r_2 i^2 \omega_2^2 e^{i\theta 2} = r_2 i^2 \omega_2^2(\cos\theta_2 + i\mathrm{sen}\theta_2)$
$r_3 i\alpha_3 e^{i\theta 3} = r_3 i\alpha_3(\cos\theta_3 + i\mathrm{sen}\theta_3)$
$r_3 i^2 \omega_3^2 e^{i\theta 3} = r_3 i^2 \omega_3^2(\cos\theta_3 + i\mathrm{sen}\theta_3)$
$r_4 i\alpha_4 e^{i\theta 4} = r_4 i\alpha_4(\cos\theta_4 + i\mathrm{sen}\theta_4)$
$r_4 i^2 \omega_4^2 e^{i\theta 4} = r_4 i^2 \omega_4^2(\cos\theta_4 + i\mathrm{sen}\theta_4)$

Separando as partes real e imaginária, obtemos o sistema de equações lineares;

$r_2\omega_2^2\cos\theta_2 + r_3\alpha_3\cos\theta_3 + r_3\omega_3^2\cos\theta_3 + r_4\alpha_4\cos\theta_4 + r_4\omega_4^2\cos\theta_4 = 0$
$r_2\omega_2^2\mathrm{sen}\theta_2 + r_3\alpha_3\mathrm{sen}\theta_3 + r_3\omega_3^2\mathrm{sen}\theta_3 + r_4\alpha_4\mathrm{sen}\theta_4 + r_4\omega_4^2\mathrm{sen}\theta_4 = 0$

As incógnitas do sistema de equações são α_3 e α_4. Resolvendo pela Regra de Cramer resulta:

$$\alpha_3 = \frac{r_2\omega_2^2\cos(\theta_2 - \theta_4) + r_3\omega_3^2\cos(\theta_3 - \theta_4) + r_4\omega_4^2}{r_3 sen(\theta_4 - \theta_3)}$$

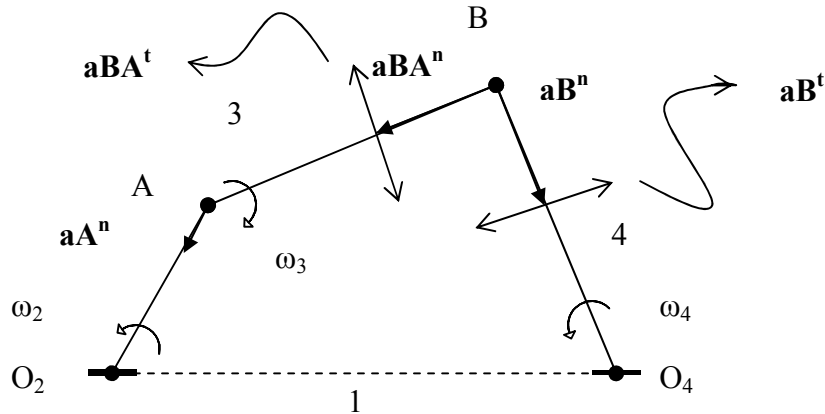
$$\alpha_4 = \frac{r_2\omega_2^2\cos(\theta_2 - \theta_3) + r_4\omega_4^2\cos(\theta_3 - \theta_4) + r_3\omega_3^2}{r_4 sen(\theta_4 - \theta_3)}$$

6.2.4 Método do Polígono de Acelerações – Mecanismo de Quatro Barras

Considere o mecanismo de quatro barras, e pretende-se determinar as acelerações nas articulações A e B, no ponto C, e as acelerações angulares das barras 3 e 4. Tal como visto na determinação das velocidades, pretende-se expressar um polígono de vetores aceleração a fim de resolver a soma estabelecida na equação de aceleração relativa:
aB = aA + aBA.

Para resolver esta soma de vetores, parte-se sempre de uma aceleração conhecida a qual será a aceleração da articulação A expressa na barra 2 – manivela, pois esta é a barra motora. Pressupõe-se, normalmente, que o mecanismo esteja trabalhando em regime, ou seja, a velocidade angular da manivela é constante fazendo com que sua aceleração angular seja zero, definindo assim a aceleração da articulação A em relação à articulação fixa O_2.

Deve-se notar que as barras 2, 3 e 4 descrevem movimentos de rotação sendo que a barra 2 gira em torno da articulação fixa O_2, a barra 3 descreve movimentos de translação e rotação girando em torno de A, e a barra 4 descreve movimento de rotação girando em torno da articulação fixa O_4.

Devido a esses movimentos as três barras possuem velocidades angulares conhecidas, o que torna possível determinar as suas acelerações normais. Os vetores que expressam as acelerações normais são totalmente conhecidos em suas direções e sentidos, e os vetores que expressam as acelerações tangenciais serão perpendiculares aos normais, sendo conhecidos somente suas direções mas não os sentidos. Podemos expressar os vetores no mecanismo abaixo:

Retornando a equação de aceleração relativa:

aB = aA + aBA

A magnitude de cada um desses vetores pode ser encontrada como se segue, dado que se conhece o comprimento das barras e as velocidades lineares e angulares:

$aB^n = \omega_4.VB$ ou $\omega_4^2.BO_4$

$aB^t = \alpha_4.BO_4$ (incógnita)

$aA^n = \omega_2.VA$ ou $\omega_2^2.AO_2$

$aA^t = \alpha_2.AO_2$ (conhecido)

$aBA^n = \omega_4.VBA$ ou $\omega_4^2.BA$

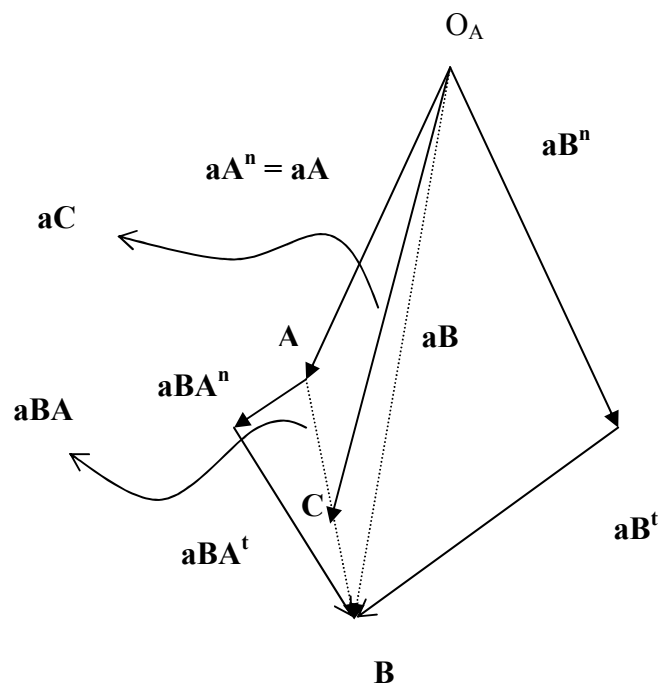
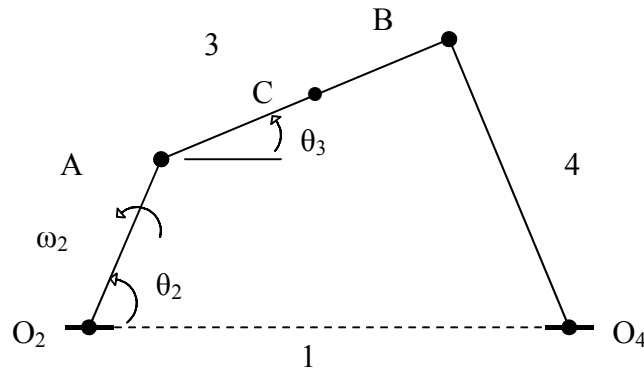
$aBA^t = \alpha_4.BA$ (incógnita)

Ao montarmos o polígono de acelerações traçamos o vetor aceleração que define a aceleração da articulação A. Em sua origem, define-se o polo de acelerações. O pólo de acelerações é o ponto de onde partem os vetores aceleração normal de A e de B, pois as barras 2 e 4 giram em torno das articulações fixas O_2 e O_4.

Na extremidade do vetor aceleração normal de B traça-se uma reta perpendicular na qual estará contido o vetor aceleração tangencial de B.

Na extremidade do vetor aceleração normal de A ou do vetor aceleração de A traça-se um vetor paralelo à barra BA, vetor aceleração normal de BA. Na extremidade deste vetor traça-se uma reta perpendicular na qual estará contido o vetor aceleração tangencial de BA, a qual irá necessariamente se cruzar com a reta perpendicular onde estará contido o vetor aceleração tangencial de B.

No cruzamento destas duas retas será localizado o ponto B, e sua aceleração será um vetor que tem como origem o pólo e extremidade em B.

Considerando que α_2 seja zero, e as velocidades conhecidas. O polígono de acelerações seria representado:

Tanto o polígono de velocidades quanto o polígono de acelerações são construídos adotando escalas de grandezas métricas representando a magnitude dos vetores em questão, portanto, as medidas dos vetores aceleração tangencial nos dará suas magnitudes, e dessa forma determinamos as acelerações angulares.

$$\alpha_3 = \frac{aBA^t}{BA}$$

$$\alpha_4 = \frac{aB^t}{BO_4}$$

O ponto C está localizado na barra AB. A razão entre CA e BA nos dará um valor proporcional, o qual representará o mesmo valor entre as acelerações de CA (aCA) e de BA (aBA). Ao determinarmos aCA localizamos o ponto C sobre o vetor aBA, e o vetor **aC** será representado do pólo ao ponto C.

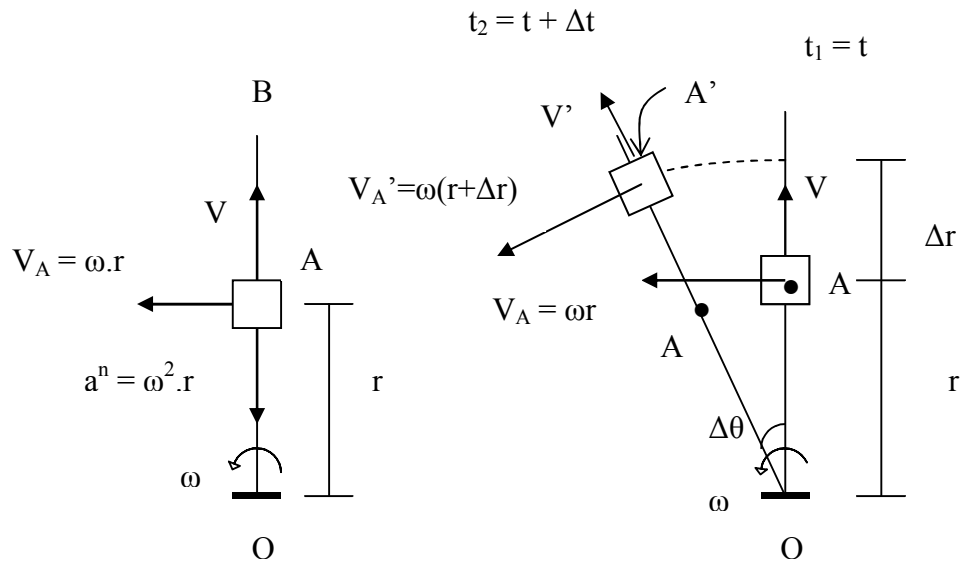
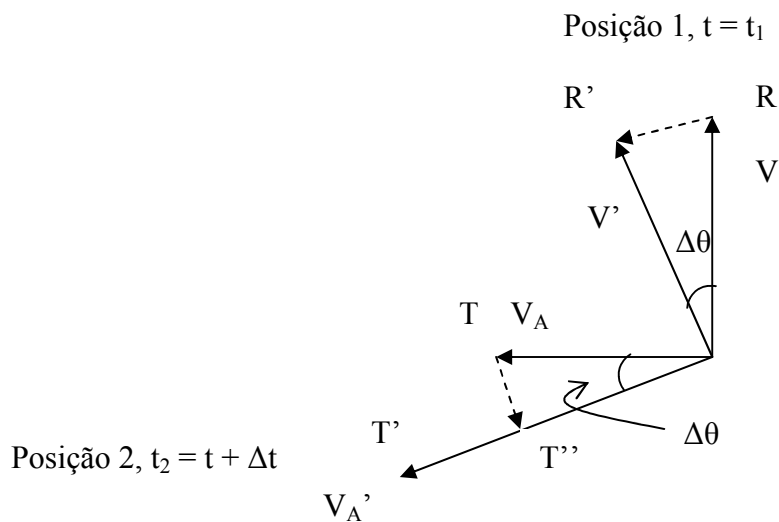
6.3. Aceleração de um Ponto no Sistema Móvel – Aceleração de Coriolis

Em nosso estudo sobre velocidade e aceleração em mecanismos vistos até agora considerou dois pontos A e B, sendo que o ponto A (articulação) descreve uma translação curvilínea devido ao movimento de rotação da barra 2 (manivela), e o ponto B (articulação) descreve um movimento em torno de A devido ao comportamento de translação e rotação da barra 3 (acoplador), chamado de movimento plano geral. Com isso escrevemos as equações de velocidade e aceleração relativas.

Considerando agora uma barra BO girando em torno de O com velocidade angular constante ω, e que entre as posições 1 e 2 uma corrediça (P) desliza radialmente para fora com velocidade V constante ao longo da barra BO.

No instante $t = t_1$ a corrediça (P) está na posição A com velocidade V,
No instante $t + \Delta t = t_2$ a corrediça (P) está na posição A' com velocidade V'
V'= V (constante)

Em função da rotação da barra e do deslocamento da corrediça entre as posições AA' com velocidade V, surge uma aceleração chamada de aceleração de Coriolis, que é uma componente da aceleração da corrediça associada com a mudança do raio de rotação AO e A'O.

Considere as figuras abaixo, e chamando de (r) a distancia AO, e $(\Delta r + r)$ a distância A'O. Δr é o incremento de grandeza do raio entre as posições A'A, enquanto a barra sofre deslocamento angular $\Delta\theta$, girando com velocidade angular ω.

A variação da velocidade (V_A') entre as posições 1 e 2 pode ser expressa pelos vetores

A velocidade no instante $t_1 = t$ pode ser decomposta em seus componentes V e V_A,
A velocidade no instante $t_2 = t + \Delta t$ pode ser decomposta em seus componentes V'e V_A'

A variação da velocidade da corrediça durante o intervalo de tempo Δt pode ser representado pela soma dos três vetores **RR', TT''** e **T''T'** . O vetor **TT''** mede a variação na direção da velocidade V_A, portanto, a aceleração de A quando Δt tende a zero, fica:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{TT''}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} V_A \frac{\Delta \theta}{\Delta t} = V_A.\omega = \omega\omega r = \omega^2.r = a_A^n$$

O vetor **RR'** mede a variação na direção de V devido a rotação da barra.

O vetor **T''T'** mede a variação da intensidade de V_A decorrente do movimento da corrediça na barra.

Ambos os vetores **RR'** e **T''T'** resultam do *efeito combinado* da velocidade relativa da corrediça e da rotação da barra. Eles desapareceriam se qualquer um desses dois movimentos cessasse. A soma desses dois vetores define a *aceleração de Coriolis*. Quando Δt tende a zero, teremos:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{RR'}{\Delta t} + \frac{T''T'}{\Delta' t} \right) = \lim_{\Delta t \to 0} \left(V \frac{\Delta \theta}{\Delta t} + \omega \frac{\Delta r}{\Delta t} \right) = V\omega + \omega V = 2\omega V$$

Podemos escrever: $a^C = 2\omega V$

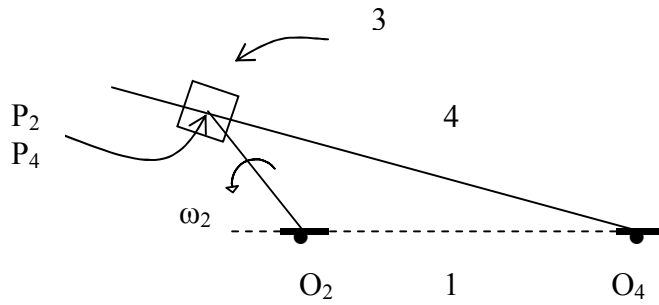
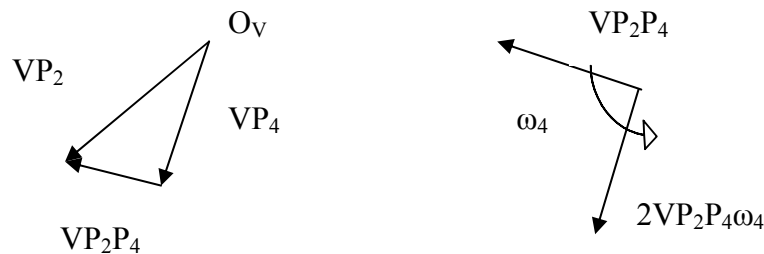
Para demonstrarmos esta aceleração, considere o mecanismo de retorno rápido. A barra 2 é a motora com velocidade angular constante, articulada na corrediça P, peça 3, a qual desliza ao longo da barra 4, enquanto a barra 2 descreve movimento de rotação em torno de O_2. De mesma forma, devido a ação da corrediça, a peça 4 descreve movimento de rotação em torno da articulação 4. São conhecidos:

$PO_2 = P_2O_2$

$PO_4 = P_4O_2$

O_2O_4

ω_2

$\alpha_2 = 0$

O polígono de velocidades pode ser traçado

$VP_2 = \omega_2 P_2O_2$ (conhecido) , $VP_2 \perp P_2O_2$ representa a velocidade da corrediça em relação a O_2.

É traçado uma reta perpendicular à barra 4 a partir do pólo O_V,

Na extremidade de VP_2 é traçado uma reta paralela à barra 4.

Haverá um cruzamento entre essas duas retas definindo o vetor VP_4, $VP_4 \perp P_4O_4$, que representa a velocidade da corrediça em relação a O_4, e o vetor VP_2P_4, paralelo à barra 4, que representa a velocidade da corrediça articulada na barra 2 deslizando na barra 4.

ω_4 pode ser determinada fazendo:

$$\omega_4 = \frac{VP_4}{P_4O_4}$$

A equação de acelerações pode ser escrita:

$AP_2 = AP_4 + AP_2P_4 + 2VP_2P_4\omega_4$

$A_{P2}^{n} = \omega_2^{2}.P2O2$ - Conhecidos módulo e direção,

$A_{P2}^{t} = 0$

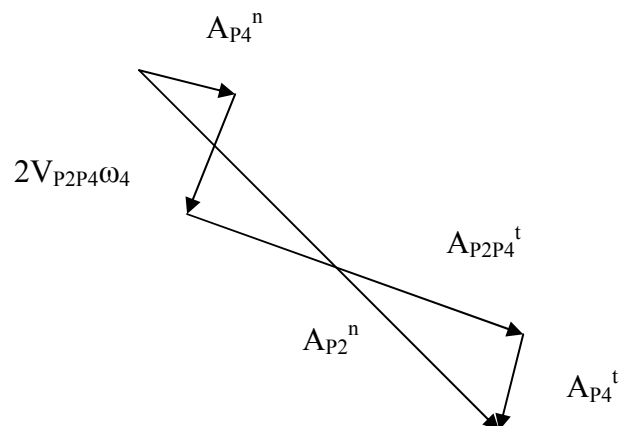
$A_{P4}^{n} = \omega_4^{2}.\ P_4O_4$ – Conhecidos módulo e direção,

$A_{P4}^{t} = \alpha_4.\ P_4O_4$ – Conhecido a direção

$A_{P2P4}^{n} = 0$, pois $A_{P2P4}^{n} = \dfrac{(V_{P2P4})^2}{R}$, sendo R o raio de curvatura da trajetória de P_4 na barra 4 infinito,

$2V_{P2P4}\omega_4$ = conhecidos módulo e direção,

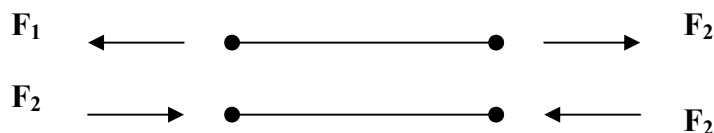
A_{p2P4}^{t} = conhecido a direção.

As acelerações podem ser determinadas através do polígono de acelerações.

7. ANÁLISE ESTÁTICA E DINÂMICA EM MECANISMOS ARTICULADOS

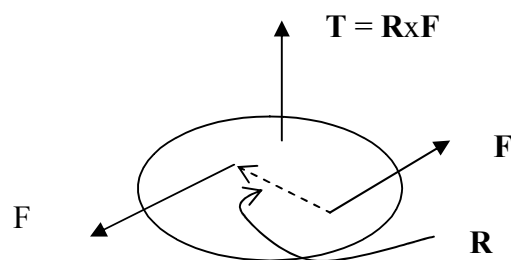
7.1 Análise Estática -

Uma força representa a ação de um corpo sobre outro. É caracterizada por seu ponto de aplicação, intensidade, direção e sentido sendo, portanto, uma quantidade vetorial.

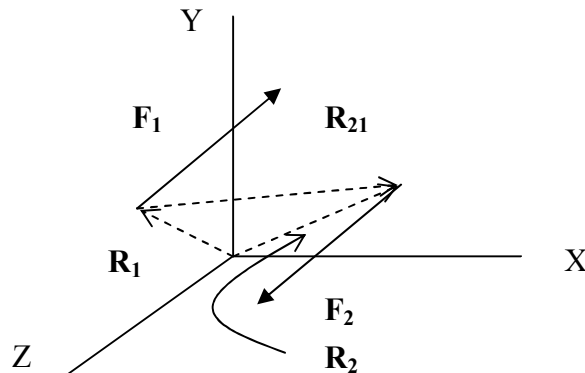
F_1 F_2

F_2 F_2

Supondo condição estática, $\sum F = 0$

F_1 e F_2 têm a mesma intensidade, mesma direção, porém, os sentidos são opostos
($F_1 = - F_2$).

Binário: duas forças iguais e opostas agindo ao longo de duas retas paralelas e não coincidentes em um corpo, não podem ser combinadas para se obter uma resultante. Essas duas forças constituem um binário.

Braço do binário (R): É a distância perpendicular entre as linhas de ação,
Momento do binário (T): É outro vetor dirigido ao plano que o contém, e o sentido é dado pela regra da mão direita.

7.1.1 Momento do Binário

Considerando duas forças iguais e de sentidos opostos, localizadas pelos vetores posição $\mathbf{R_1}$ e $\mathbf{R_2}$ em relação ao centro de referência 'O'.

Da figura temos: $\mathbf{R_2 = R_1 + R_{21}} \;\therefore\; \mathbf{R_{21} = R_2 - R_1}$

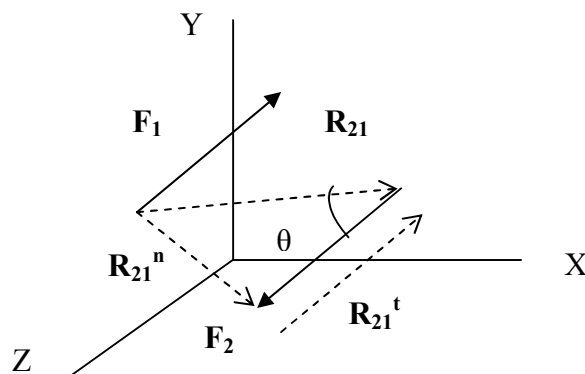
O momento do binário é a soma dos momentos produzidos por cada força:

$\mathbf{T = R_1} \text{ x } \mathbf{F_1} + \mathbf{R_2} \text{ x } \mathbf{R_2}$, mas $\mathbf{F_1 = - F_2}$ (sentidos opostos)

$\mathbf{T} = - (\mathbf{R_1} \text{ x } \mathbf{F_1}) + \mathbf{R_2} \text{ x } \mathbf{F_2}$

$\mathbf{T = (R_2 - R_1)} \text{ x } \mathbf{F_2}$

$\mathbf{T = R_{21}} \text{ x } \mathbf{F_2}$ (análise vetorial)

A magnitude do momento também pode ser obtida fazendo:

$\mathbf{R_{21}} = \mathbf{R_{21}^n} + \mathbf{R_{21}^t}$

$\mathbf{T} = (\mathbf{R_{21}}^n + \mathbf{R_{21}}^t) \times \mathbf{F_2}$

$\mathbf{T} = \mathbf{R_{21}}^n \times \mathbf{F_2} + \mathbf{R_{21}}^t \times \mathbf{F_2}$ mas

$\mathbf{R_{21}}^n$ é perpendicular à linha de ação de F_2 $\therefore$ $\mathbf{T} = \mathbf{R_{21}}^n \times \mathbf{F_2}$

$\mathbf{R_{21}}^t$ é paralela à linha de ação de F_2 $\therefore$ $\mathbf{T} = \mathbf{R_{21}}^t \times \mathbf{F_2} = 0$.

Expressando as magnitudes;

$R_{21}^n = R_{21}\,\text{sen}\theta$ $\therefore$

$T = R_{21}\,\text{sen}\theta \,.\, F_2$

Chamando $R_{21}\,\text{sen}\theta = h$,

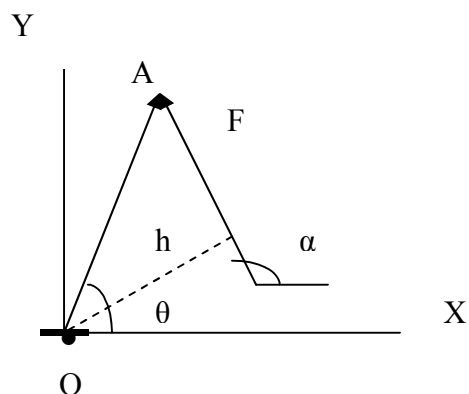
$T = h.F_2$

h = reta perpendicular à linha de ação da força.

Um corpo está em equilíbrio estático se:

- A soma vetorial de todas as forças que agem sobre ele é zero,
- A soma dos momentos de todas as forças em torno de um eixo que passa pelo corpo é zero.

Exemplo de fixação:

Determinar o torque aplicado na barra pela força F

Determinação analítica:

$T = h.F$ (s.a.h.)

h: é a distância perpendicular da linha de ação da força até a articulação; h é uma grandeza medida.

Determinação vetorial:

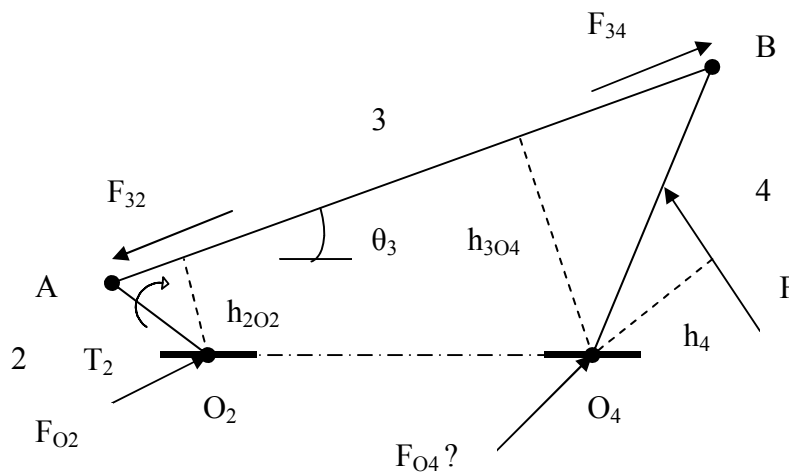
T = AO x **F**

AO = AO ∠ θ = AO cosθ **i** + AO senθ **j**

F = F ∠ α = F cosα **i** + F senα **j**

7.1.2 Forças e Torques Estáticos em Mecanismo Articulado

Para calcular as forças e torques em qualquer mecanismo é necessário isolar cada peça deste mecanismo considerando-a como um corpo livre, e aplicar as condições de equilíbrio.

A força F está aplicada na barra 4. Determinar as forças que surgem em O_2 e O_4, assim como o torque a ser aplicado na barra 2 (T_2) para manter o mecanismo em equilíbrio estático.

Na figura representando o mecanismo as forças e o momento (T_2) estão expressos, porém, para determina-los, é necessário é necessário analisarmos a condição de equilíbrio estático de cada barra. Parte-se inicialmente da barra onde a força conhecida está aplicada que é a barra 4.

Ao ser aplicada a força F, surgirão nas articulações B e O_4 as forças de reação F_{34} e F_{O4}. Com relação à força F_{34} conhece-se sua direção (paralela à barra 4), e sentido (da esquerda para a direita), tendo como incógnita a intensidade.

Desconhece-se todas as informações sobre a força F_{O4} pois é uma força aplicada no ponto – articulação. A magnitude de F_{34} é determinada através da somatória dos momentos em relação a O_2.

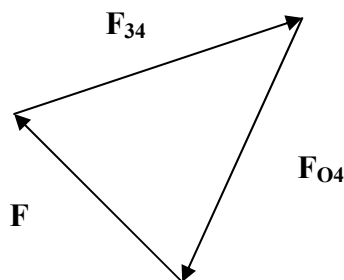
A condição de equilíbrio estático aplicado à barra 4 indica que a somatória das forças que atuam nela seja igual a zero, e que a somatória dos momentos causados pelas forças que atuam nela em relação a articulação O_4 também seja igual a zero:

$$\sum F_4 = 0 : \mathbf{F} + \mathbf{F_{34}} + \mathbf{F_{O4}} = 0$$

$$\sum T_2 = 0 : F.h_4 - F_{34}.h_{3O4} = 0$$

As grandezas h_4 e h_{3O4} são medidas tomadas por retas perpendiculares às linhas de ação das forças em questão. A partir dessas medidas determina-se F_{34}

$$F_{34} = \frac{F.h_4}{h_{3O4}}$$

Uma vez determinado F_{34}, a força F_{O4} é determinada através da somatória de momentos. A força F_{O4} é representada pelo vetor que fecha o polígono. A grandeza do vetor na sua respectiva escala e sua inclinação definem a força.

Uma vez definida F_{34}, é necessário elaborar a condição de equilíbrio estático da barra 3.

$\sum F_3 = 0$: $\mathbf{F_{34} + F_{32} = 0}$

Como as forças são iguais e opostas, a intensidade de F_{32} é igual à de F_{34} já determinada.

A força F_{32} atuando na articulação A promove a reação na articulação O_2 dada pela força F_{O2}. Essas duas forças constituem um binário atuando na barra 2. O momento aplicado na barra 2 que mantém o mecanismo em equilíbrio, é o momento com sentido oposto ao causado pela força $F_{O2.}$

$\sum T_2 = 0$: $F_{32}. h_{2O2} - T_2 = 0$

A grandeza h_{2O2} é a medida tomada perpendicular entre a linha de ação da força F_{32} e a articulação O_2.

$T_2 = F_{32}. h_{2O2}$ (s.h.)

7.2 Análise Dinâmica

Quando um mecanismo está em movimento surgem acelerações, e as forças e torques resultantes são referidas como forças e torques de inércia. Também são conhecidos como forças e torques dinâmicos, e são altas particularmente em mecanismos que desenvolvem altas velocidades. Tais forças e torques podem ser adicionadas vetorialmente às forças e torques estáticas discutidas no item 7.1.

7.2.1 Princípio D'Alembert

O Princípio d'Alembert é um corolário das equações de Newton. Considere um corpo de massa *m* submetido à ação de forças cuja resultante não passa pelo seu centro de massa G (figura a).

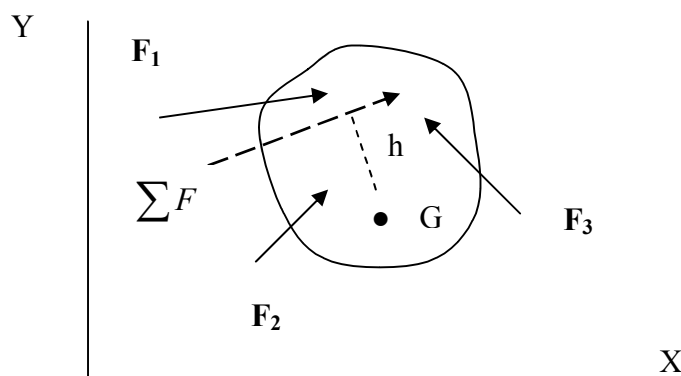
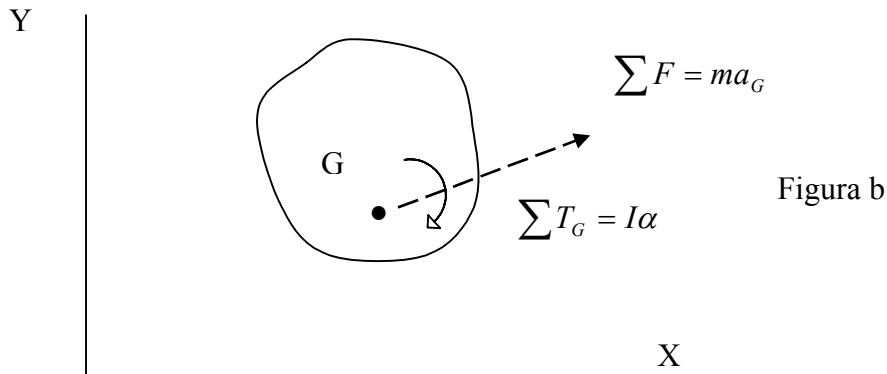



Figura a

h : distância perpendicular entre a linha de ação da força resultante ($\sum F$) e o centro de massa G.

$\sum F = \mathbf{F_1} + \mathbf{F_2} + \mathbf{F_3}$

Devido ao fato de a força resultante não passar por G, surgem as acelerações linear (a_G) e angular (α), as quais definem a força de inércia e o torque de inércia ou conjugado de inércia, (figura b).

Figura b

$\sum F = ma_G$ - translação – força de inércia

$\sum T_G = I\alpha$ - rotação – torque de inércia ou conjugado de inércia, onde $T = \sum F.h$

O Princípio d'Alembert estabelece que a soma vetorial de todas as forças externas e as de inércia agindo sobre um corpo rígido é zero, e que a soma vetorial de todos os momentos externos e os conjugados de inércia agindo sobre um corpo rígido também é zero. O princípio estabelece a condição de equilíbrio dinâmico, onde:

$\sum F - ma_G = 0$ (figuras a' e b')

$\sum T_G - I\alpha = 0$ (figuras a' e b')

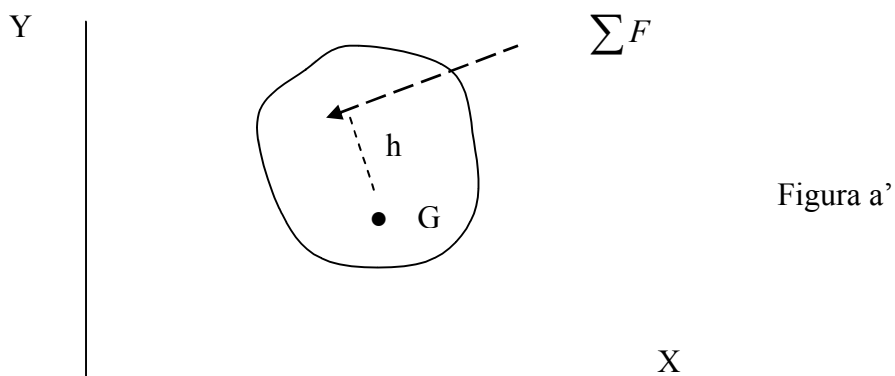
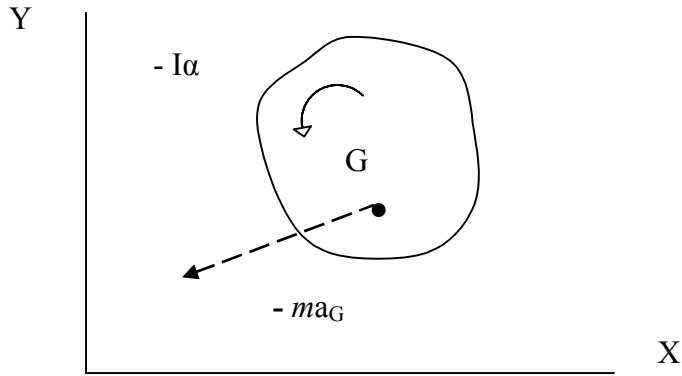
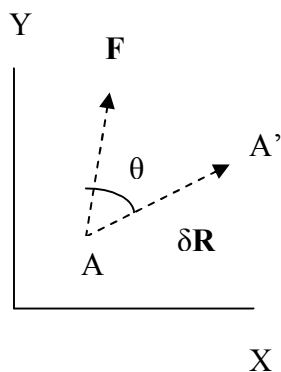
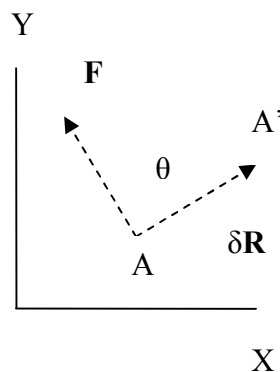
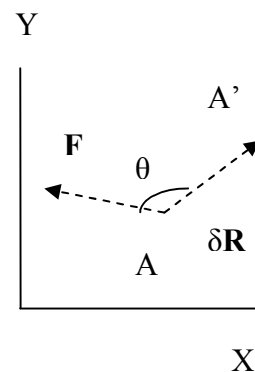
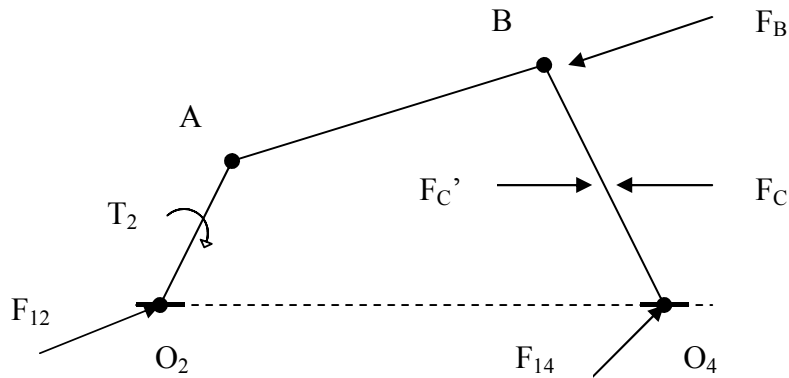



Figura a'

Figura b’

7.2.2 Forças e Torques Dinâmicos em Mecanismo Articulado – Método do Trabalho Virtual.

O método admite um suposto trabalho, trabalho virtual, realizado pela ação de uma força real agindo em um determinado corpo o qual, pela ação da força, sofre um deslocamento imaginário (deslocamento virtual).

Trabalho = força x deslocamento ($\Gamma = F.R$)
Trabalho virtual = força real x deslocamento virtual ($\delta\Gamma = F.\delta R$)
O trabalho é o resultado do produto escalar entre os vetores força e deslocamento, portanto, ele pode ser:

Positivo: $270^0 \langle\ \theta\ \langle\ 90^0$ Nulo: θ +/- 90^0 Negativo: $90^0\ \langle\ \theta\ \langle\ 270^0$

Considere o mecanismo:

$\mathbf{F_{12}}$ e $\mathbf{F_{14}}$ não executam trabalho pois os pontos O_2 e O_4 não se deslocam.

$\mathbf{F_C}$ e $\mathbf{F_C}$**'** não executam trabalho pois nesse ponto, as forças realizam quantidades iguais de trabalho positivo e negativo, os quais se anulam. (**$\mathbf{F_C = -F_C}$')**.

$\mathbf{F_B}$ e $\mathbf{T_2}$ realizam trabalho caso a articulação sofra um pequeno deslocamento.

Trabalho virtual realizado por uma força: $\delta\Gamma = \mathbf{F}.\delta\mathbf{R}$

Trabalho virtual realizado por um torque: $\delta\Gamma = \mathbf{T}.\delta\boldsymbol{\theta}$

Supondo um deslocamento virtual ao sistema, e sendo que o mesmo deva estar em equilíbrio sob a ação de forças e torques aplicados, o trabalho virtual total deve ser zero.

$$\delta\Gamma = \sum F_n.\delta R_n + \sum T_n.\delta\theta_n = 0 \quad \text{...} \quad \text{eq.7.1}$$

Para o sistema em movimento - condição dinâmica, pode-se utilizar o princípio de trabalhos virtuais, considerando-se as forças de inércia e os conjugados de inércia como forças e torques aplicados:

$$\sum F = 0, \sum T = 0$$

Dividindo-se a equação 7.1 por δt:

$\delta\Gamma = \sum F_n \frac{\delta R_n}{\delta t} + \sum T_n \frac{\delta \theta_n}{\delta t} = 0$, obtemos:

$\delta\Gamma = \sum F_n.V_n + \sum T_n.\omega_n = 0$ .... eq. 7.2

O sub-índice *n* indica a barra em análise. Esta equação 7.2 indica que o trabalho virtual é proporcional às velocidades dos pontos de aplicação das forças. Incluindo todas as forças e torques de inércia, a equação torna-se,

$\sum F.V + \sum F_i.V + \sum T.\omega + \sum T_i.\omega = 0$, onde na condição de equilíbrio dinâmico,

$\mathbf{F_i} = -m\mathbf{a}$ (força de inércia) atenção: notar o sinal!
$\mathbf{T_i} = -I\boldsymbol{\alpha}$ (torque de inércia) atenção: notar o sinal!

O princípio de trabalho virtual é aplicado em cada barra do mecanismo. As velocidades e acelerações lineares são as obtidas no ponto onde se localiza o centro de massa de cada barra (**A_G e V_G**), escritas na notação retangular para que seja possível fazer o produto, assim como as velocidades e acelerações angulares **ω** e **α** na direção perpendicular ao plano e sentido positivo ou negativo.

O momento de inércia (I) é o momento em relação ao centro de massa da barra que chamaremos de I_G , e sua determinação será visto como se segue:

7.2.3 Determinação do Momento de Inércia – Centro de Percussão

Considere uma barra com massa não uniforme, e localizando seu centro de massa (CG) representado pela letra G, determinado por balanceamento, e chamando de B o seu centro de percussão ou de oscilação.

Quando o corpo é atingido por uma pancada em G, seu movimento inicial é de translação (figura c) fazendo surgir em “O” uma força de trepidação. Quando o corpo é atingido pela pancada em B (figura c’) ele oscila em torno da articulação “O”, seu

movimento é de rotação, e não ocorre a força de trepidação. A única força está relacionada com a força radial ($mr\omega^2$).

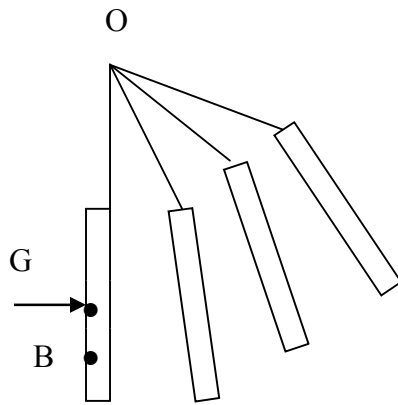
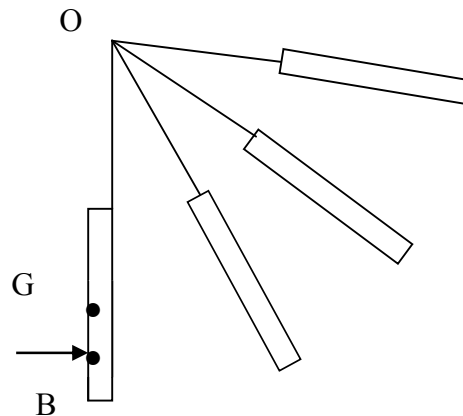
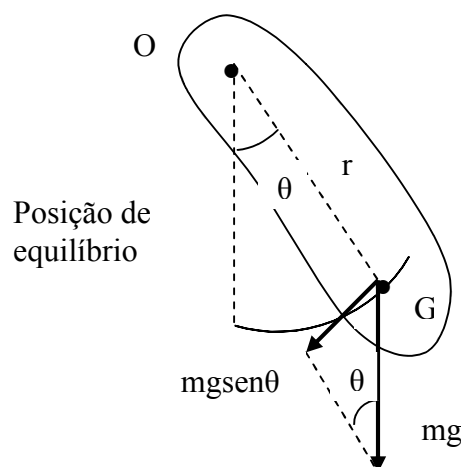



Figura c Figura c’

7.2.3.1 Determinação do Período de Oscilação do Pêndulo Físico

O pêndulo físico é representado por um corpo rígido com massa distribuída com forma é arbitrária, e oscila em torno de um ponto de articulação “O”. A linha “r”representa a distância entre o ponto de articulação e o centro de gravidade G. Queremos determinar a expressão que nos dê sua freqüência natural de oscilação (ω_n), o período de oscilação (T), e o momento de inércia do pêndulo em relação à articulação O, (I_0).

A força restauradora age tangente a trajetória do centro de massa G, tendendo a trazer o pêndulo para a posição de equilíbrio, e constitui-se na força tangencial. $F_t = -mg\text{sen}\theta$, onde mg é a força peso do pêndulo.

Devido ao fato de que o pêndulo físico possui massa distribuída, e toda massa gira em torno de "O", a segunda Lei de Newton pode ser escrita devido ao efeito de rotação:

$T = I_0\alpha$, onde α = aceleração angular ($\alpha = \ddot{\theta}$), T = torque, e I_0 é o momento de inércia em relação ao centro de rotação "O".

Podemos escrever: $T = F_t \cdot r = I_0\alpha$, ou, $- mg\text{sen}\theta \cdot r = I_0\alpha$. Tomando pequenos ângulos, $\text{sen}\theta \sim \theta$, escrevemos: $- mg\theta r = I_0\alpha$. Igualando a zero, obtemos:

$I_0 \ddot{\theta} + mgr\theta = 0$ Equação diferencial para o pêndulo físico. Dividindo a equação por I_0,

$$\ddot{\theta} + \frac{mgr}{I_0}\theta = 0$$

A freqüência de oscilação é dada pela raiz do termo que multiplica o deslocamento:

$$\omega n = \sqrt{\frac{mgr}{I_0}} ,$$

O período de oscilação é dado pelo inverso da freqüência obtido experimentalmente ao provocarmos um pequeno deslocamento no corpo e soltando-o.

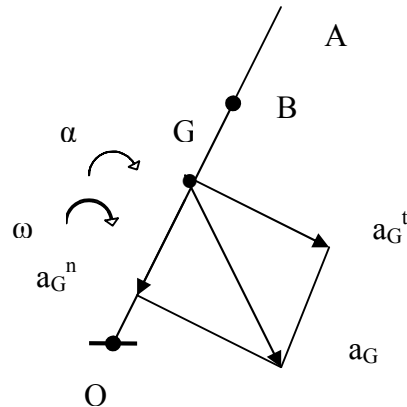
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_0}{mgr}}$$

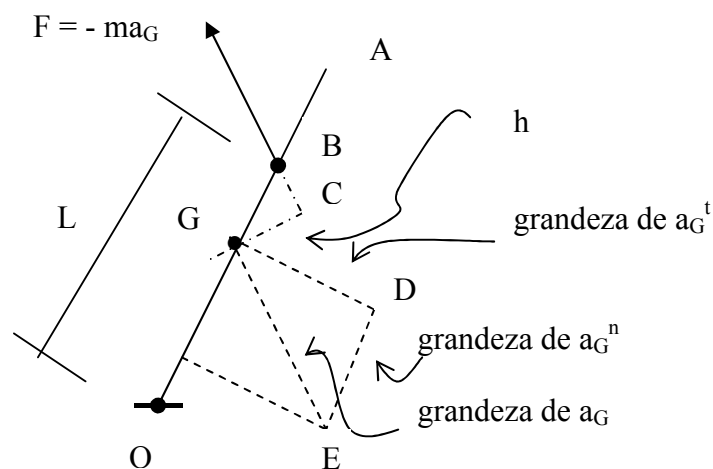
Isolando I_0, obtemos o momento de inércia em relação a "O"

$$I_0 = \frac{mgrT^2}{4\pi^2} \quad \text{.......... eq. 7.3}$$

Entretanto, o que nos interessa é o momento de inércia em relação ao centro de massa G, também chamado momento de inércia em relação ao centróide (I_G). Esse momento de inércia é dado por

$I_G = I_0 - mr^2$, onde r é a distância OG. .... eq. 7.4

Considere a barra desbalanceada AO girando com velocidade angular ω e aceleração angular α, e seu centro de massa G, e o centro de percussão B. Devido a esses parâmetros, aparecerão em G as acelerações normal (a_G^n) e tangencial (a_G^t), componentes da aceleração a_G.

Em função da aceleração, aparecerá uma força de inércia em G de magnitude $F = ma_G$ passando pelo centro de massa G, e um conjugado de inércia dado por $T = I\alpha$.

Considerando a condição de equilíbrio dinâmico, aparecerá uma força igual e oposta à força de inércia atuando em G ($F = -ma_G$), passando pelo centro de percussão B, com mesma direção mas sentido oposto a a_G, gerando o torque $T = -I\alpha$.

A distância (h) do centro de percussão B em relação ao centro de massa é encontrado fazendo:

$T = I_G.\alpha$,

$F.h = I_G.\alpha$,

$$h = \frac{I_G \alpha}{F} = \frac{I_G \alpha}{m a_G}$$

Analisando a figura acima, e pela semelhança de triângulos, podemos escrever:

$\frac{GC}{GD} = \frac{GB}{GE}$, isolando GB, $GB = \frac{GC.GE}{GD}$, mas

$GC = h = \frac{I_G \alpha}{m a_G}$, $GE = a_G$; $GD = a_G^t = OG.\alpha$, portanto,

$$GB = \frac{\frac{I_G \alpha}{m a_G}.a_G}{OG.\alpha} \quad \therefore \quad GB = \frac{I_G}{m.OG}, \quad \therefore \quad GB.OG = \frac{I_G}{m} = r^2$$

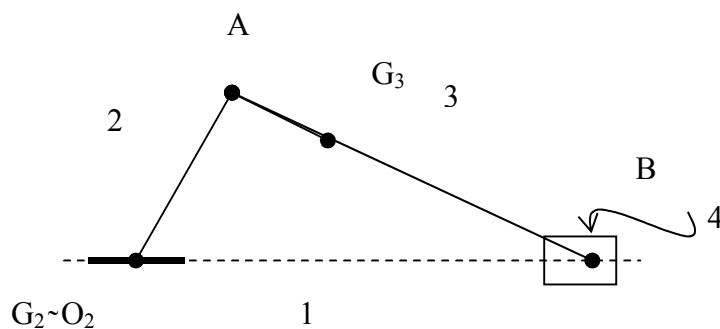
$r^2 = GB.OG$, mas $GB = L - OG$, portanto, $r^2 = OG(L-OG)$

$I_G = mr^2 \therefore I_G = m[OG(L-OG)]$, mas $OG = r$, temos então:

$I_G = m\left[r\left(\frac{T^2 g}{4\pi^2}\right) - r\right]$ ou $I_G = I_0 - mr^2$, tal como a equação 7.4

7.3 Exemplo de Aplicação

Considere o mecanismo pistão-biela-manivela, determinar o torque a ser aplicado na barra (2) para superar as forças de inércia. São conhecidos:

- Velocidades angulares das barras 2 e 3,
- Acelerações angulares das barras 2 e 3,
- Velocidades lineares dos centros de massa das barras 2, 3 e do pistão,
- Acelerações lineares dos centros de massa das barras 2, 3 e do pistão,
- Massa das barras 2, 3 e do pistão,
- Momento de inércia das barras 2 e 3.

Da expressão de trabalhos virtuais podemos escrever para o mecanismo através de cada peça:

$$\sum F.V + \sum F_i.V + \sum T.\omega + \sum T_i.\omega = 0$$

$\mathbf{F_i} = -m\mathbf{a}$ (força de inércia)   atenção: notar o sinal!

$\mathbf{T_i} = -I\boldsymbol{\alpha}$ (torque de inércia)   atenção: notar o sinal!

Desta equação podemos escrever:

$$\mathbf{T_2.\omega_2} + \mathbf{F_{i2}.V_{G2}} + \mathbf{T_3.\omega_3} + \mathbf{F_{i3}.V_{G3}} + \mathbf{F_{i4}} = 0$$

Barra 2:

$\mathbf{T}_2.\boldsymbol{\omega}_2 = T_2\mathbf{k} \, . \, \omega_2\mathbf{k}$

$\mathbf{F_{i2}}.\mathbf{V_{G2}} = 0$ (G_2~O_2)

Barra 3:

$\mathbf{T_3}.\boldsymbol{\omega_3} = - I_3\alpha_3\mathbf{k}.\omega_3\mathbf{k}$

$\mathbf{F_{i3}}.\mathbf{V_{G3}} = - m_3\mathbf{a_{G3}} \, . \, \mathbf{V_{G3}}$

Barra 4:

$\mathbf{T_4}.\boldsymbol{\omega_4} = 0$ (somente translação)

$\mathbf{F_{i4}} \, . \, \mathbf{V_4} = - m_4\mathbf{a_4} \, . \, \mathbf{V_4}$

O resultado desses produtos será escalar, e a única incógnita será T_2.

O exemplo acima foi considerado a determinação do torque T_2 para superar as forças e torques de inércia do mecanismo, entretanto, se houver uma força aplicada, por exemplo na peça 4 – pistão ou corrediça, podemos determinar o torque estático para manter o mecanismo em equilíbrio estático, e o torque dinâmico surgido na condição dinâmica. O torque encontrado para superar a força estática e as forças de inércia será a soma dos dois encontrados.

BIBLIOGRAFIA

BEER, Ferdinand P. e JOHNSTON, E. Russel Jr. **Mecânica Vetorial para Engenheiros**. 7ª Ed. Rio de Janeiro: McGraw-Hill Interamericana do Brasil Ltda., 2006.

FLORES, Paulo e CLARO, J. C. Pimenta. **Cinemática de Mecanismos**. Coimbra: Almedina, 2007.

GROSJEAN, Jacques. **Kinematics and Dyanamics of Mechanisms**. UK: Mc-Graw-Hill Book Company, 1991.

KIMBRELL, Jack T. **Kinematics Analysis and Syntesis.** Singapore: McGraw-Hill Book Co., 1991.

MABIE, Hamilton H. e OCVIRK, Fred W. **Mecanismos e Dinâmica das Máquinas.** 2ª ed: Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico S.A., 1977.

MARTIN, George H. **Kinematics and Dynamics of Machines.** 2ª ed. EUA: Mc-Graw-Hill, 1982

NORTON, Robert L. **Cinemática e Dinâmica dos Mecanismos.** 1ª ed. Porto Alegre: AMGH Editora Ltda, 2010.

RIGHETTO, Armando. **Números Complexos e Funções Hiperbólicas**. São Bernardo do Campo: Ivan Rossi Editora, 1977.

SHIGLEY, Joseph E. **Cinemática dos Mecanismos**. São Paulo: Editora Edgard Blücher LTDA e Editora Universidade de São Paulo. 1969.

SHIGLEY, Joseph E. **Dinâmica das Máquinas**. São Paulo: Editora Edgard Blücher LTDA e Editora Universidade de São Paulo. 1969.

SKARSKI, Boleslaw. **Análise Cinemática dos Mecanismos**. Campinas: Unicamp, Publicação CT, 1980.

SKARSKI, Boleslaw. **Síntese Cinemática dos Mecanismos**. Campinas: Unicamp, Publicação CT, 1980.

SPIEGEL, Murray, R. **Manual de Fórmulas e Tabelas Matemáticas**. São Paulo: McGraw-Hill, 1973.